ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია

მათემატიკა 8

მასწავლებლის წიგნი

გრიფმინიჭებულია საქართველოს განათლების, მეცნიერების, კულტურისა და სპორტის სამინის-ტროს მიერ 2020 წელს.

სულაკაურის
გამომცემლობა

მათემატიკა 8
მასწავლებლის წიგნი
თბილისი, 2020

ავტორები: **ნანა ჯაფარიძე, ნანი წულაია, მაია წილოსანი**

რედაქტორი **ნინო მალუტაშვილი**
ყდის დიზაინერი **ია მახათაძე**
ტექნიკური დიზაინერი **ნინო კუბლაშვილი**

შპს „სულაკაურის გამომცემლობა“
მისამართი: დავით აღმაშენებლის 150, თბილისი 0112
ტელ.: 291 09 54, 291 11 65
ელფოსტა: info@sulakauri.ge

ISBN 978-9941-30-616-7

MATH 8
Teacher's Book

Tbilisi, Georgia
www.sulakauri.ge

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

VIII კლასში მათემატიკის საგნის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში კვლევის ჩვევის, აგრეთვე ანალიტიკური, ლოგიკური, სისტემური და სიმბოლური აზროვნების გამომუშავება. მათემატიკის სწავლამ მოსწავლეს უნდა შესძინოს ის უნარ-ჩვევები, რომლებიც მას დაეხმარება ცხოვრებისეული, პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრაში.

ეროვნული სასწავლო გეგმის დანიშნულებაა დაეხმაროს სასკოლო განათლების პროცესის მონაწილეებს ამ პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში აღწერილია ის სავალდებულო მოთხოვნები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა მოსწავლე სასწავლო წლის დასრულების მერე. ეს მოთხოვნები თითოეული მიმართულებისათვის შედეგებისა და მათი ინდიკატორების ენაზეა ჩამოყალიბებული.

შედეგი არის დებულება იმის შესახებ, თუ რა უნდა შეძლოს მოსწავლემ სწავლის მოცემული საფეხურის დასრულების შემდეგ.

ინდიკატორი არის დებულება იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დემონსტრირების შესახებ, რომელიც ჩამოყალიბებულია შესაბამის შედეგში. ინდიკატორის ძირითადი დანიშნულებაა იმის წარმოჩენა, მიღწეულია თუ არა შედეგი. ინდიკატორი ორიენტირებულია უნარ-ჩვევებზე და ჩამოყალიბებულია აქტივობის ენაზე.

VIII კლასის წარმოდგენილი სახელმძღვანელოს დანიშნულებაა ხელი შეუწყოს ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

სახელმძღვანელო ფარავს სტანდარტის ყველა შედეგს.

მასალის მიწოდების ძირითადი მეთოდური ორიენტირია პრობლემური თხრობა. მოსწავლე არის გაკვეთილის ახსნის აქტიური მონაწილე.

გაგაცნობთ წიგნის სტრუქტურას:

თითქმის ყველა პარაგრაფი იწყება სიტუაციური ამოცანით, მაპროვოცირებელი შეკითხვით ან ისეთი ამოცანით, რომელიც მოსწავლისაგან კვლევას მოითხოვს და რომელიც იძლევა ვარაუდის გამოთქმის საშუალებას. გაკვეთილის ეტაპები გამოყოფილია აქტივობებით, რითიც მოწმდება ახალი მასალის ათვისების ხარისხი. ვარსკვლავით მონიშნულია ამოცანები მაღალი შეფასებისათვის.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში მოცემულია რამდენიმე გაკვეთილის სცენარი, აქტივობების მიზანი, დანიშნულება, სავარაუდო და სწორი პასუხები, საკონტროლოს ნიმუშები. მოცემულია შეფასების ძირითადი კრიტერიუმები, დამხმარე ლიტერატურა მასწავლებლისათვის.

აგრეთვე, გთავაზობთ სავარაუდო საათობრივ ბადეს. სარეზერვო საათები გვაძლევს საშუალებას, რომ ზოგიერთ გაკვეთილს მასწავლებელმა მეტი დრო დაუთმოს, გამოიყენოს თავის შეხედულებისამებრ.

სახელმძღვანელოს შესახებ

მიზანი
VIII კლასში მათემატიკის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში აზროვნების უნარის განვითარება, ლოგიკური და კრიტიკული დამოკიდებულების ჩამოყალიბება, მათემატიკის იმ „ანბანის" ათვისება და გათავისება, რომელზეც უნდა დაშენდეს შემდგომი ცოდნა.

მოსწავლის წიგნის სტრუქტურა
სახელმძღვანელო დაყოფილია თავებად. ყოველი თავი დაყოფილია პარაგრაფებად. აქედან თითოეულს ახლავს „ტესტი თვითშემოწმებისათვის" და თავის დამატებითი სავარჯიშოები, რომლებიც, ერთი მხრივ, გავლილი მასალის გამყარებასა და ღრმად გააზრებას ემსახურება, მეორე მხრივ კი – იმ უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებას, რაც მათ მოამზადებს მათემატიკის „სილამაზის", ლოგიკისა და თანმიმდევრულობის აღსაქმელად.
არასტანდარტულად დასმული ამოცანა ან შეკითხვა მოსწავლის მხრიდან იწვევს ერთგვარ შიშს, თუ ის ამას მიჩვეული არ არის. მათი დაძლევა და სირთულეების გადალახვა მოსწავლეში იწვევს თავდაჯერებულობას, აცხოველებს ინტერესსა და მათემატიკის სიყვარულს. ამის გათვალისწინებით, VIII კლასში მოსწავლის წიგნში შევიდა არასტანდარტული ამოცანები. მათი დაძლევა მერვეკლასელებს აღარ გაუჭირდებათ, ვინაიდან წინა კლასებში უკვე აკეთებდნენ მსგავს ამოცანებს მასწავლებლის მითითებით. ეს ამოცანები საშუალებას იძლევა, მასწავლებელს ხელთ ჰქონდეს სამუშაო იმ მოსწავლეებისათვის, რომლებიც კლასთან შედარებით უფრო სწრაფად ითვისებენ მასალას. ზემოხსენებული ამოცანები ხელს უწყობს მოსწავლეთა ინტერესის გაღვივებას, კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას, პრობლემებისადმი სხვადასხვა მიდგომას. მათი ხშირად ჩართვა საგაკვეთილო პროცესში ხელს შეუწყობს მათემატიკურ წრეებში მუშაობას (თუ ასეთი წრეები არსებობს სკოლაში) ან ნაწილობრივ მაინც შეასრულებს ამ ფუნქციას, წრის არარსებობის შემთხვევაში. მასწავლებელს თავადაც შეუძლია, შეადგინოს მსგავსი ამოცანები მოცემული ნიმუშების მიხედვით. ამ ამოცანათა ამოხსნის ჩვენ მიერ შემოთავაზებული ხედვა დაეხმარება მასწავლებელს და შესძენს არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ხერხების გამოყენების გამოცდილებას, რაც ცალსახად ხელს შეუწყობს მის პროფესიულ განვითარებას.

მეთოდიკა
პარაგრაფის სტრუქტურა მაქსიმალურად უზრუნველყოფს მოსწავლის ჩართულობას საგაკვეთილო პროცესში. ყოველი პარაგრაფი იწყება მოსწავლეებისთვის (ინდივიდუალურად ან წყვილებში) განკუთვნილი დავალებით, რომლის გადაწყვეტის შემდეგაც მოზარდი მზადაა ახალი მასალის ასათვისებლად, რომლის გააზრებასა და ათვისებას ხელს უწყობს პარაგრაფში ჩართული „ინდივიდუალური კითხვები", რომლებიც ზოგ პარაგრაფში რამდენიმე ადგილას გვხვდება (იმის მიხედვით, თუ რამდენად ითხოვს ამას პარაგრაფში გადმოცემული მასალა). ამავე დროს, მოსწავლესა და მასწავლებელს ეხმარება იმის შეფასებაში, თუ რამდენადაა ათვისებული და გააზრებული ესა თუ ის თემატური მომენტი.
მოსწავლის წიგნში მრავლადაა სხვადასხვა აქტივობის შემცველი დავალებები: პროექტი, პრაქტიკული სამუშაო...
პარაგრაფის ეს სტრუქტურა უზრუნველყოფს მოსწავლეზე ორიენტირებული გაკვეთილის ჩატარებას, სადაც მასწავლებელი არ არის მასალის გადმომცემი და მოსწავლე – პასიური მსმენელი.
მოსწავლე აქტიურად მონაწილეობს საგაკვეთილო პროცესში. ყოველი დასკვნა, განმარტება და წესი ყალიბდება მოსწავლეებისა და მასწავლებლის ერთობლივი ძალისხმევით. ყოველ

თავს ახლავს ერთი ან ორი „ტესტი თვითშემოწმებისთვის“, რომელთა დანიშნულებაცაა არა მხოლოდ ტესტში მოცემული დავალებების შესრულება, არამედ მოსწავლის მიერ საკუთარი თავის შეფასება.

მასწავლებლის წიგნის სტრუქტურა
მასწავლებლის წიგნში მოცემულია მკაფიო მითითებები და ამოხსნები ყოველი თავისთვის განკუთვნილი საკონტროლო წერის ნიმუშებითურთ. გაკვეთილის მსვლელობა პარაგრაფის სტრუქტურითაა უზრუნველყოფილი, მაგრამ მასწავლებელს შეუძლია, შეცვალოს იგი შეხედულებისამებრ.
მასწავლებლის წიგნში, ასევე, მოცემულია შეფასების სისტემა, მიზნებისა და შედეგების რუკა, გაკვეთილის სცენარები კონკრეტული პარაგრაფისთვის.
მასწავლებლის წიგნის ბოლოს მოცემულია დამხმარე ლიტერატურა, შემაჯამებელი სამუშაოს ნიმუშები და მოსწავლის წიგნში შესული ამოცანების/სავარჯიშოების, მათ შორის, რუბრიკის – „ამოცანები მათემატიკის მოყვარულთათვის“ – პასუხები.

გთავაზობთ გაკვეთილის ჩატარების ზოგად სქემას:
I – მიცემული ინდივიდუალური დავალება (5 წთ);
II – ამ დავალებების პრეზენტაცია მოსწავლეთა მიერ (5-10 წთ);
III – ახალი მასალის განხილვა (მასწავლებელი და მოსწავლეები ერთობლივად) (10-15 წთ);
IV – ახალი მასალის გამყარება, განმტკიცება – წიგნში მოცემული ინდივიდუალური ან წყვილებისთვის განკუთვნილი კითხვებით (5-10 წთ);
V – პარაგრაფში განხილული ამოხსნილი ამოცანების გარჩევა-გააზრება, ხშირად დისკუსიითაც (10 წთ);
VI – გაკვეთილის შეჯამება, დავალების მიცემა (5 წთ).

სასწავლო თემების მატრიცა

საგანი: მათემატიკა

მიმართულება: მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი.

კლასი: 8

I თავი

<table>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• საგნებს შეიძლება ჰქონდეს გეომეტრიული სხეულების ფორმები;
• გეომეტრიული სხეული, მაგალითად კუბი, შეიძლება არ იყოს სწორად აგებული, მაგრამ ჩვენ ამას თვალით ვერ შევამჩნევთ.</td><td>• გეომეტრიული სხეულები
• ალბათობათა თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები</td><td>• რომელი გეომეტრიული სხეულის ფორმა აქვს კამათელს?
• როგორ ფიქრობთ, ერთნაირად მოსალოდნელია თუ არა, კამათლის გაგორებისას ამა თუ იმ რიცხვის მოსვლა?
• რამდენი წახნაგი აქვს კამათელს?
• შეგიძლიათ შეამოწმოთ რამდენად სწორი ფორმა აქვს კამათელს - როგორც კუბს?</td><td>• შექმენით თაბაშირისგან კამათელი;
• ფურცელზე ჩამოწერეთ 1-დან 6-მდე რიცხვები;
• გააგორეთ კამათელი და იმ რიცხვის გასწვრივ, რომელიც მოვა, ფურცელზე გააკეთეთ მონიშვნა;
• გააგორეთ სულ მცირე 200 ჯერ;
• დააჯამეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის სიხშირე;
• გამოთვალეთ გაგორებათა საერთო რიცხვი;
• გამოთვალეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე;
• მიღებული შედეგები შეადარეთ $\frac{1}{6}$-ს;
• როგორ ფიქრობთ, შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ თუ რამდენად სწორად გამოძერწეთ კამათელი (კუბის მოდელი).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური სიტუაციის აღწერისათვის გამოიყენება მისი ამსახველი მარტივი მოდელი, რომელიც გამოხატავს სიტუაციას მარტივი ფორმით.
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისკენ, რითაც მარტივად მიიღწევა არგუმენტების საფუძველზე შესაბამისი დასკვნები.</td><td colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</td><td>შეფასების კრიტერიუმები</td></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი - მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების გაცნობა
II ეტაპი - მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო ცოდნის გახსენება.
III ეტაპი - დავალების შესასრულებლად საჭირო მასალის დამუშავება;
IV ეტაპი - კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია წარმოქმნილ საკითხებთან დაკავშირებით.</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
• გამოიყენოს მიღებული ცოდნა პრაქტიკულ სამუშაოს შესრულებისას;
• ანალიზის საფუძველზე დაასკვნას, თუ რამდენად სწორად შეძლო პრაქტიკული სამუშაოს შესრულება.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">საგანი: მათემატიკა
მიმართულება: გეომეტრია
კლასი: 8
II თავი</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• მართკუთხედი შეგვიძლია შევქმნათ 2 ტოლი მართკუთხა სამკუთხედისგან და პირიქით, მართკუთხედი შეგვიძლია გავყოთ 2 ტოლ მართკუთხა სამკუთხედად;
• ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურა შეგვიძლია დავჭრათ ჩვენთვის საინტერესო ფიგურებად;
• ფიგურის ფართობი მისი ყველა ნაწილის ფართობთა ჯამის ტოლია.</td><td>ბრტყელი ფიგურები, მრავალკუთხედები, ფიგურის პერიმეტრი, ფართობი, უმარტივესი აგებები.</td><td>• როგორ ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტებით?
• მოცემულ წერტილზე როგორ გავატაროთ მოცემული წრფის პარალელური წრფე?
• როგორ გამოითვლება მართკუთხედის პერიმეტრი?
• როგორ გამოითვლება მართკუთხედის ფართობი?
• როგორ გამოითვლება ფიგურის ფართობი, თუ ვიცით მისი ნაწილების ფართობები?
• როგორ გამოვთვალოთ ფიგურის ნაწილის ფართობი, თუ ვიცით მთლიანი ფიგურის ფართობი და მისი დანარჩენი ნაწილების ფართობები?</td><td>• შექმენით სტადიონის, ან თქვენთვის სასურველი ნებისმიერი ობიექტის მაკეტი
• გაზომეთ საჭირო მონაკვეთები და გამოთვალეთ სტადიონის პერიმეტრი.
• გამოთვალეთ სტადიონის ფართობი.
• გამოთვალეთ სარბენი ბილიკის ფართობი.
• მოიძიეთ ინფორმაცია, თუ როგორი უნდა იყოს სტადიონის სიგრძისა და სიგანის შეფარდება.
• არის თუ არა თქვენს მიერ შექმნილი მაკეტის ზომები რეალური სტადიონის ზომების პროპორციული</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური ობიექტის მოდელი გამოხატავს ობიექტს მარტივი ფორმით.
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისკენ, რითაც მარტივად მიიღწევა შესაბამისი დასკვნები.</td><th colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</th><th>შეფასების კრიტერიუმები</th></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი- მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების გაცნობა
II ეტაპი - მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება
III ეტაპი - კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია წარმოქმნილ საკითხებთან დაკავშირებით.</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
• გამოიყენოს მიღებული ცოდნა პრაქტიკულ სამუშაოს შესრულებისას;
• ანალიზის საფუძველზე შეამოწმოს, რამდენად სწორად შეძლო დავალების შესრულება.</td></tr>
</table>

საგანი: მათემატიკა

მიმართულება: ალგებრა.

კლასი: 8

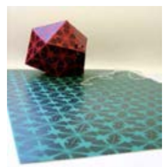
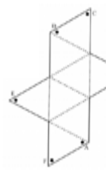
III თავი

<table>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• როგორც რაოდენობები, ასევე ნატურალური რიცხვები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან.
• კონტექსტიდან გამომდინარე, რამდენიმე რიცხვი შეგვიძლია ერთ ჯგუფში განვიხილოთ, მიუხედავად იმისა, რომ ეს რიცხვები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან.</td><td>ნატურალური რიცხვები, ტოლობა, უტოლობა</td><td>• რამდენი ბურთულა შეიძლება იყოს I ყუთში იმისათვის, რომ რაოდენობა იყოს ყველაზე მეტი? (ჩამოთვალეთ)
• რამდენი ბურთულა უნდა მოთავსდეს I და IV ყუთში ერთად?
• რამდენი ბურთულა უნდა ჩავდოთ I ყუთში?
• რამდენი ბურთულა ჩავდოთ IV ყუთში?</td><td>• გვჭირდება 75 დეტალი, რომელთა დამზადებაც შესაძლებელია 4 საამქროში. I საამქროში ხარისხი მაღალია, ამიტომ გვინდა, რაც შეიძლება მეტი დეტალი დავუკვეთოთ. II და III საამქროში შესაძლებელია 45 დეტალის გადანაწილება. IV საამქროს ხარისხი არ ვიცით, ამიტომ გვინდა რაც შეიძლება ნაკლები დეტალი შევუკვეთოთ.
• სიტუაციის ანალიზის საფუძველზე შესაძლებელია ამ პრობლემის მარტივი მოდელის შექმნა: აიღეთ 4 ყუთი და 75 ბურთულა. გადაანაწილეთ ბურთულები ყუთებში იმ პირობით, რომ: I ყუთში იქნება ყველაზე მეტი ბურთულა, II და III ყუთებში გადაანაწილეთ 45 ბურთულა, IV ყუთში მოათავსეთ რაც კი შეიძლება ნაკლები ბურთულა.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური სიტუაციის აღწერისათვის გამოიყენება მისი ამსახველი მარტივი მოდელი, რომელიც გამოხატავს სიტუაციას მარტივი ფორმით.
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისკენ, რითაც მარტივად მიიღწევა არგუმენტების საფუძველზე შესაბამისი დასკვნები</td><th colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</th><th>შეფასების კრიტერიუმები</th></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი: მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების გაცნობა
II ეტაპი: კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო საკითხების გახსენება
III ეტაპი: რეალური სიტუაციის შესაბამისი მარტივი მოდელის შექმნა
IV ეტაპი: მოსწავლემ უნდა გაიაზროს კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია დავალების ცალკეულ ეტაპებთან დაკავშირებით</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
• გადაჭრას პრობლემა სიტუაციის აღმწერი მარტივი მოდელის საშუალებით;
• გამოიყენოს მიღებული ცოდნა აღწერილ სიტუაციაში;
• სიტუაციის აღმწერი მარტივი მოდელის მაგალითზე შეამოწმოს, თუ რამდენად სწორად შესრულა კონკრეტული დავალება.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">საგანი: მათემატიკა
მიმართულება: ალგებრა.
კლასი: 8
IV თავი</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• მონაკვეთის სიგრძე - მისი მახასიათებელია;
• მონაკვეთის სიგრძე რიცხვი გამოისახება;
• ზოგი მონაკვეთის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება
• არსებობს მონაკვეთი, რომლის სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება
• რიცხვით ღერძზე მოიძებნება წერტილები, რომელთაც შეესაბამება ირაციონალური რიცხვები.</td><td>რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები; პითაგორას თეორემა, აგების უმარტივესი ამოცანები.</td><td>• არსებობს თუ არა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი გამოისახება ნატურალური რიცხვებით?
• არსებობ თუ არა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის გვერდიც გამოისახება ირაციონალური რიცხვით?
• გამოისახება თუ არა რიცხვითი ღერძის ყველა წერტილის კოორდინატი რაციონალური რიცხვით?</td><td>• შექმენი მართკუთხა სახაზავი, რომლის ერთი კათეტი გამოისახება ირაციონალური რიცხვით.
• გამოთვალე მიღებული მოდელის ფართობი და პერიმეტრი.
• რიცხვით ღერძზე, მისი სათავიდან გადაზომე ამ სახაზავის ირაციონალური რიცხვის შესაბამისი კათეტის ტოლი მონაკვეთი
• დაასახელე მიღებული წერტილის კოორდინატი
• გააკეთე შესაბამისი დასკვნა.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური მიზნისთვის გამოიყენება მარტივი მოდელი, რომელიც გამოიყენება მოცემული მიზნის მისაღწევად.
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისაკენ, რითაც არგუმენტების საფუძველზე მიიღწევა შესაბამისი დასკვნები.</td><th colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</th><th>შეფასების კრიტერიუმები</th></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი - მოსწავლეებისათვის კომპლექსური დავალების გაცნობა;
II ეტაპი - კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო საკითხების გახსენება;
III ეტაპი - რეალური სიტუაციის შესაბამისი მოდელის შექმნა
IV ეტაპი - მოსწავლემ უნდა გაიაზროს კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია დავალების ცალკეულ ეტაპებთან დაკავშირებით</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
• პრაქტიკული საქმიანობისას გამოიყენოს მიღებული ცოდნა;
• მიხვდეს, თუ რა ცოდნა უნდა გამოიყენოს მიზნის მისაღწევად პრაქტიკული საქმიანობის ამა თუ იმ ეტაპზე;
• საქმიანობის შედეგად გააკეთოს შესაბამისი დასკვნა.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">საგანი: მათემატიკა
მიმართულება: ალგებრა.
კლასი: 8
V თავი</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან ფიგურებს შორის არსებობს კავშირი
• სამგანზომილებიან სხეულზე შესაძლებელია მოვძებნოთ ორგანზომილებიანი სხეულები.</td><td>წრფივი ფუნქცია, დახრის კუთხე</td><td>• რას ეწოდება წრფის დახრილობა?
• რა ფიგურაა წრფივი ფუნქციის გრაფიკი?
• როგორ ვიპოვოთ წრფივი ფუნქციის განტოლება?</td><td>• გამოთვალე შენს მიერ არჩეული კიბის დახრის კუთხე;
• გამოთვალე კიბის სიგრძე;
• გამოთვალე კიბის სიმაღლე;
• მიღებული შედეგების მიხედვით დაწერე შესაბამისი წრფის განტოლება;
• შექმენი კიბის მოდელი.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური ობიექტის შესაბამისი მოდელი, რომელიც გამოიყენება მოცემული მიზნის მისაღწევად
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისაკენ, რის შედეგადაც მიიღწევა შესაბამისი დასკვნები.</td><th colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</th><th>შეფასების კრიტერიუმები</th></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი - მოსწავლეებისათვის კომპლექსური დავალების გაცნობა;
II ეტაპი - კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო საკითხების გახსენება;
III ეტაპი - რეალური სიტუაციის შესაბამისი მოდელის შექმნა
IV ეტაპი - მოსწავლემ უნდა გაიაზროს კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია დავალების ცალკეულ ეტაპებთან დაკავშირებით</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
•შექმნას სამგანზომილებიანი ობიექტის შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელი;
• შექმნილი მოდელის დახმარებით დაადგინოს სამგანზომილებიანი ობიექტის ესა თუ ის მახასიათებელი;
• შექმნას რეალური ობიექტის მაკეტი.</td></tr>
</table>

საგანი: მათემატიკა
მიმართულება: გეომეტრია
კლასი: 8
VI თავი

სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხი / საკითხები	საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები	კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები
• ბრტყელ და სივრცულ ფიგურებს შორის არსებობს კავშირი, თუმცა ისინი ერთმანეთისგან განსხვავდებიან. • ბრტყელი ფიგურების გამოყენებით შესაძლებელია სივრცული ფიგურის მიღება.	მრავალკუთხედები, მრავალწახნაგების შლილები.	• რას ეწოდება მრავალწახნაგას შლილი? • შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი მრავალწახნაგას შლილის მიღება? • შესაძლებელია თუ არა შლილის შეწებება ისე, რომ მიიღო მრავალწახნაგა?	შევქმნათ ნაძვის ხის სათამაშოები: • დახაზე შენთვის სასურველი მრავალწახნაგას შლილი თხელ მუყაოს ფურცელზე; • მონიშნე ის წერტილები, რომელიც მრავალწახნაგას ერთ წვეროსთან მოიყრის თავს; • გააკეთე ნახვრეტები ამ წერტილებზე ძაფის გასაყრელად; • ერთი მხრიდან ამ შლილზე დააკარი საჩუქრების შესაფუთი ქაღალდი; • გამოჭერი შლილი, შეაწებე და მიიღებ ნაძვის ხის სათამაშოს.    
მოდული: გამოხატავს სასურველი ფორმის ობიექტს. ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა მიზნის მისაღწევად შესაბამისი ცოდნის გამოყენებით.	**აქტივობა / აქტივობები**		**შეფასების კრიტერიუმები**
	I ეტაპი. მოსწავლეებს გავაცნოთ კომპლექსური დავალება. II ეტაპი. მოსწავლეების წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო საკითხების გახსენებით. III ეტაპი. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო მასალის დამუშავება. IV ეტაპი. კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებზე.		მოსწავლეს შეუძლია: •დახაზოს სასურველი ფორმის მრავალწახნაგას შლილი; • შლილზე შეძლოს იმ წერტილების მოძებნა, რომლებსაც ერთ წვეროსთან მოუყრის თავს; • შლილის გამოყენებით შექმნას მრავალწახნაგა.

<table>
<tr><td colspan="4">საგანი: მათემატიკა
მიმართულება: გეომეტრია
კლასი: 8
VII თავი</td></tr>
<tr><th>სამიზნე ცნება და ცნებასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი / საკითხები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / საკვანძო შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალება / კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td>• შესაძლებელია სივრცული ფიგურის დაყოფა რამდენიმე სივრცულ ფიგურად.
• განსხვავებული ფორმის სივრცულ ფიგურებს შესაძლებელია ჰქონდეს ტოლი მოცულობები</td><td>• სამკუთხედის მედიანების თვისება
• სივრცული ფიგურების მოცულობების შედარება</td><td>• სამკუთხედში გავლებული მედიანა რა შეფარდებით გაყოფს ფართობს?
• შეადარეთ სამკუთხედში გავლებული მედიანებით მიღებული ექვსივე სამკუთხედის ფართობები.</td><td>• შექმენი სამკუთხა პირამიდის მოდელი. (ყველა გვერდი არ იყოს ტოლი). პირამიდის ფუძე გაყავი 6 ტოლდიდ ნაწილად.
• დაახასიათე მიღებული 6 პირამიდა, რომელთა ფუძეები მიღებული ნაწილებია.
• შემდეგი სიდიდეებიდან: ფუძეები, წიბოები, სიმაღლეები - რა აქვს ამ პირამიდებს ტოლი და რა აქვს განსხვავებული.
• შეადარე ამ პირამიდების მოცულობები.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">მოდელი: რეალური ობიექტის შესაბამისი მოდელი, რომლის მიხედვითაც შეძლებს ორიენტირებას, რათა გასცეს პასუხი დასმულ შეკითხვებს.
ლოგიკა: აზროვნების მიმართვა თვალსაჩინო მაგალითისაკენ, რის შედეგადაც მიიღწევა შესაბამისი დასკვნები.</td><th colspan="2">აქტივობა / აქტივობები</th><th>შეფასების კრიტერიუმები</th></tr>
<tr><td colspan="2">I ეტაპი. მოსწავლეებს გავაცნოთ კომპლექსური დავალება.
II ეტაპი. მოსწავლეების წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო საკითხების გახსენებით.
III ეტაპი. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო მასალის დამუშავება.
IV ეტაპი. კომპლექსური დავალების პრეზენტაცია, დისკუსია პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებზე.</td><td>მოსწავლეს შეუძლია:
• შექმნას პირამიდის მოდელი;
• მოდელის მიხედვით დაადგინოს, თუ რა ექნება საერთო მიღებულ ექვს პირამიდას;
• დაასაბუთოს, რომ მიღებულ პირამიდებს ექნებათ ტოლი მოცულობები.</td></tr>
</table>

ამონარიდი „ეროვნული სასწავლო გეგმიდან“

მოსწავლის შეფასების სისტემა

მოსწავლის შეფასების მიზანი, პრინციპები და ამოცანები

1. მოსწავლის შეფასების მთავარი მიზანია სწავლა-სწავლების ხარისხის მართვა, რაც გულისხმობს, ერთი მხრივ, სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე ზრუნვას და, მეორე მხრივ, სწავლა-სწავლების ხარისხის მონიტორინგს. შეფასება უნდა იძლეოდეს ინფორმაციას მოსწავლის ინდივიდუალური პროგრესის შესახებ.

2. მოსწავლის შეფასება არის სწავლა-სწავლების განუყოფელი ნაწილი. თანამიმდევრული საგანმანათლებლო პროცესის უზრუნველსაყოფად, მოსწავლის შეფასება უნდა დაეფუძნოს სწავლის კონსტრუქტივისტულ პრინციპებს.

3. მოსწავლის შეფასების ძირითად ამოცანებს წარმოადგენს:

ა) აჩვენოს როგორ მიმდინარეობს მოსწავლის ცოდნის კონსტრუირების პროცესი და მეხსიერებაში ცოდნათა ურთიერთდაკავშირება;

ბ) ახალი სასწავლო საკითხის/თემის დაწყებამდე დაადგინოს მოსწავლის წინარე ცოდნა და წარმოდგენები;

გ) გამოავლინოს, რამდენად ახერხებს მოსწავლე საკუთარი ძლიერი და სუსტი მხარეების დამოუკიდებლად შეფასებას, ასევე - რამდენად გააზრებულ და ეფექტიან ნაბიჯებს დგამს იგი საკუთარი წინსვლის ხელშესაწყობად;

დ) მოიცვას სამივე კატეგორიის ცოდნა;

ე) აჩვენოს, რამდენად ახერხებს მოსწავლე ცოდნის ერთობლიობათა ფუნქციურად გამოყენებას შინაარსიან კონტექსტებში.

4. ძირითადი ამოცანების გადასაჭრელად, მოსწავლის შეფასებაში, პრიორიტეტი მიენიჭება კომპლექსურ, კონტექსტის მქონე დავალებებს, რომელთა შესრულება მოსწავლეს უბიძგებს ცოდნის სხვადასხვა კომპონენტის ინტერაქტიულად და თანადროულად გამოყენებისკენ.

განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასება

1. შეფასება შეიძლება იყოს: განმსაზღვრელი და განმავითარებელი.

2. განმსაზღვრელი შეფასება ადგენს მოსწავლის მიღწევის დონეს საგნობრივი სასწავლო გეგმის შედეგებთან მიმართებაში.

3. განმავითარებელი შეფასება ადგენს თითოეული მოსწავლის განვითარების დინამიკას და მიმართულია სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე.

განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასებების აღწერილობა

	განმავითარებელი	განმსაზღვრელი
მიზნები:	სწავლის ხარისხის გაუმჯობესება; მოსწავლის წინსვლისა და განვითარების ხელშეწყობა.	მოსწავლის აკადემიური მიღწევის დონის დადგენა საგნობრივი სასწავლო გეგმის შედეგებთან მიმართებაში.
ამოცანები:	ცოდნის კონსტრუირებისა და ცოდნათა ურთიერთდაკავშირების პროცესის შეფასება; წინარე ცოდნის/წარმოდგენების დადგენა; მოსწავლის მიერ თავისივე ძლიერი და სუსტი მხარეების დადგენის უნარის შეფასება; მოსწავლის მიერ საკუთარი წინსვლის ხელშესაწყობად გააზრებული ნაბიჯების გადადგმის უნარის შეფასება; ცოდნის სამივე კატეგორიის ათვისების პროცესის შეფასება; ცოდნის ერთობლიობათა ფუნქციურად გამოყენების უნარის შეფასება.	ცოდნათა ურთიერთდაკავშირების უნარის შეფასება; ცოდნის სამივე კატეგორიის გამოყენების უნარის შეფასება; ცოდნის ერთობლიობათა ფუნქციურად გამოყენების უნარის შეფასება.
წარმატების კრიტერიუმი:	განხორციელებული წინსვლა წინარე შედეგებთან/ წინარე დონესთან შედარებით.	მიღწევის დონე საგნობრივი სასწავლო გეგმის მოთხოვნებთან შედარებით.
შემფასებელი და შეფასების ფორმები:	**მასწავლებელი**: ზეპირსიტყვიერი ან წერილობითი უკუკავშირი, წამახალისებელი მითითებები, სიმბოლური ნიშნები და ა.შ. **მოსწავლეები**: თვითშეფასებით; ურთიერთშეფასებით.	მასწავლებელი: ქულა (შეიძლება ახლდეს კომენტარი ძლიერი და სუსტი მხარეების აღწერით, ხარვეზების გამოსასწორებელი მითითებებით).

აკადემიური მიღწევის დონეები და შეფასების სისტემა

მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევები ფასდება ათქულიანი სისტემით ხუთი დონის მიხედვით:

ქულები	შეფასების დონეები
1 0	მაღალი
9	
8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

შეფასება დაწყებით, საბაზო და საშუალო საფეხურებზე

V კლასის მეორე სემესტრსა და VI-XII კლასებში განმავითარებელი და განმსაზღვრელი შეფასება გამოიყენება. მოსწავლე ფასდება ათქულიანი სისტემით, ყველაზე დაბალი ქულა არის 1, ხოლო ყველაზე მაღალი ქულა - 10.

V-XII კლასებში სპორტის საგნობრივ ჯგუფში გაერთიანებულ საგნებში, საგანში „საგზაო ნიშნები და მოძრაობის უსაფრთხოება“ და არჩევით საგნებში მოსწავლე ფასდება ჩათვლის სისტემით: ჩაეთვალა/არ ჩაეთვალა.

მოსწავლის შეფასების კომპონენტები

1. სემესტრის განმავლობაში მოსწავლეები ფასდებიან შემდეგი სამი კომპონენტის მიხედვით:

ა) მიმდინარე საშინაო დავალება;

ბ) მიმდინარე საკლასო დავალება;

გ) შემაჯამებელი დავალება.

2. მასწავლებელს შეუძლია სემესტრის განმავლობაში განმავითარებელი შეფასება გამოიყენოს ნებისმიერ კომპონენტში.

3. სემესტრის განმავლობაში განმსაზღვრელი შეფასებით მოსწავლეები ფასდებიან შემდეგ კომპონენტებში:

ა) მიმდინარე საკლასო დავალება (V კლასის მეორე სემესტრი, VI-XII კლასები);

ბ) მიმდინარე საშინაო დავალება (VII-XII კლასები);

გ) შემაჯამებელი დავალება (V კლასის მეორე სემესტრი, VI-XII კლასები).

4. ამ მუხლის მე-3 პუნქტით განსაზღვრულ კომპონენტებს ერთნაირი წონა აქვს.

5. I-VI კლასებში საშინაო დავალების კომპონენტში გამოიყენება მხოლოდ განმავითარებელი შეფასება.

6. I-IV კლასებსა და V კლასის პირველ სემესტრში საკლასო და შემაჯამებელ დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება მხოლოდ განმავითარებელი შეფასება.

7. V კლასის მეორე სემესტრსა და VI-XII კლასებში საკლასო და შემაჯამებელ დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება როგორც განმსაზღვრელი, ასევე განმავითარებელი შეფასება.

	I-IV კლასები და V კლასის პირველი სემესტრი	**V კლასის მეორე სემესტრი და VI კლასი**	**საბაზო და საშუალო საფეხურები**
მიმდინარე საშინაო დავალება	განმავითარებელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება განმსაზღვრელი შეფასება
მიმდინარე საკლასო დავალება	განმავითარებელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება განმსაზღვრელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება განმსაზღვრელი შეფასება
შემაჯამებელი დავალება	განმავითარებელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება განმსაზღვრელი შეფასება	განმავითარებელი შეფასება განმსაზღვრელი შეფასება

8. შემაჯამებელი დავალების კომპონენტში სავალდებულოა კომპლექსური, კონტექსტის მქონე დავალებების გამოყენება (მაგ., ესეს დაწერა, პროექტის მომზადება, ლაბორატორიული კვლევის ჩატარება, რეფერატის დაწერა, ამოცანის ამოხსნა, სახვითი და გამოყენებითი ხელოვნების ნიმუშის შექმნა, მოთხრობის შედგენა, მონაცემთა ბაზის შექმნა, კონკრეტული პრობლემის გადაჭრა, საველე-გასვლითი სამუშაოს ან სასწავლო ექსკურსიის ანგარიშის მომზადება და სხვ.). ამგვარ დავალებაში შესრულებული სამუშაოს მრავალმხრივი შეფასებისათვის პედაგოგმა უნდა შეიმუშაოს მოსწავლეების შეფასების კრიტერიუმები.

9. ეროვნული სასწავლო გეგმა V კლასის მეორე სემესტრის, VI კლასისა და საბაზო-საშუალო საფეხურების თითოეული საგნისათვის განსაზღვრავს სემესტრის განმავლობაში ჩასატარებელი შემაჯამებელი დავალებების სავალდებულო მინიმალურ რაოდენობას.

10. მოსწავლე ვალდებულია, შეასრულოს კლასში ჩატარებული ყველა შემაჯამებელი დავალება (ეროვნული სასწავლო გეგმით დადგენილი სავალდებულო მინიმუმი და სკოლის მიერ დამატებით დადგენილი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში.).

11. თუ მოსწავლე არ შეასრულებს რომელიმე შემაჯამებელ დავალებას გაცდენის გამო, სკოლა ვალდებულია, მისცეს მას გაცდენილი შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის საშუალება. შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის ვადები და მისი ჩატარების ფორმა განისაზღვრება სასკოლო სასწავლო გეგმით.

12. თითოეული მასწავლებელი ვალდებულია, კათედრას წარუდგინოს მის მიერ კლასში ჩატარებული შემაჯამებელი დავალებების დოკუმენტაცია. აღნიშნულ დოკუმენტაციაში წარმოდგენილი უნდა იყოს: შემაჯამებელი დავალების ნომერი, შემაჯამებელი დავალების პირობა, საგნის სტანდარტის ის შედეგი/შედეგები, რომლის შეფასებასაც ემსახურება კონკრეტული შემაჯამებელი დავალება; კრიტერიუმები, რომლითაც შეფასდება ეს დავალებები; ასევე, მოსწავლეების მიერ შესრულებული და მასწავლებლის მიერ შეფასებული შემაჯამებელი დავალების რამდენიმე ნიმუში ან შესრულებული შემაჯამებელი დავალების ამსახველი ვიზუალური მასალა.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულათა სახეობები

ზოგადსაგანმანათლებლო სისტემაში გამოიყენება განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგი სახეობები:

ა) საგნის მიმდინარე საკლასო, მიმდინარე საშინაო და შემაჯამებელი დავალებების ქულები, რომლებსაც მოსწავლე იღებს სემესტრის განმავლობაში;

ბ) საგნის სემესტრული ქულა - საგანში მიღებული შეფასება თითოეულ სემესტრში;

გ) საგნის წლიური ქულა - სემესტრული ქულებიდან გამომდინარე შეფასება საგანში. გამონაკლისს წარმოადგენს მეხუთე კლასის წლიური ქულა, რომელიც მეორე სემესტრის საგნის სემესტრული ქულის იდენტურია. წლიურ ქულაში შეიძლება წლიური გამოცდის ქულაც აისახოს, თუ ასეთი გამოცდა გათვალისწინებულია სასკოლო სასწავლო გეგმით და სკოლის მიერ განსაზღვრულია, რომ მას გავლენა ექნება საგნის წლიურ ქულაზე.

ქულების გამოანგარიშების წესი

1. საგნის სემესტრული ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში სხვადასხვა კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობაზე;

ბ) მიღებული ქულა უნდა დამრგვალდეს მთელის სიზუსტით (მაგ., 6,15 მრგვალდება 6-მდე; 7,49 მრგვალდება 7-მდე; 8,5 მრგვალდება 9-მდე.);

გ) იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეს არა აქვს შესრულებული ყველა ჩატარებული შემაჯამებელი დავალება, მისი სემესტრული ქულის გამოსაანგარიშებლად სხვადასხვა კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობისა და შეუსრულებელი შემაჯამებელი დავალებების რაოდენობის ჯამზე;

დ) თუ სემესტრის განმავლობაში სკოლიდან სკოლაში გადასვლისას აღმოჩნდება, რომ მიმღებ სკოლაში რომელიმე საგანში/საგნებში ჩატარებულია შემაჯამებელი დავალების/დავალებების უფრო მეტი რაოდენობა, ვიდრე გამშვებ სკოლაში, მიმღები სკოლა მოსწავლის შემაჯამებელი დავალების რაოდენობას დაითვლის გამშვებ სკოლაში დადგენილი და მოსწავლის მიერ შესრულებული, ასევე, მიმღებ სკოლაში მოსწავლის გადმოსვლის მომენტიდან ჩატარებული და მის მიერ შესრულებული შემაჯამებელი დავალებების მიხედვით;

ე) 36-ე მუხლის მე-2 პუნქტით გათვალისწინებული სემესტრული გამოცდის ჩაბარების შემთხვევაში, სემესტრული ქულა გამოითვლება მისი გათვალისწინებით: გამოცდის ქულა ემატება საგნის სემესტრულ ქულას და ჯამი იყოფა ორზე.

2. საგნის წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) საგნის წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად საგნის სემესტრული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს ორზე;

ბ) საგნის წლიური ქულა მრგვალდება მთელის სიზუსტით (მაგ., 7,25 მრგვალდება 7-მდე; 4,49 მრგვალდება 4-მდე; 9,5 მრგვალდება 10-მდე.);

გ) თუ სასკოლო სასწავლო გეგმა ითვალისწინებს წლიური გამოცდის ჩატარებას და განსაზღვრულია, რომ ამ გამოცდის ქულაც აისახება საგნის წლიურ ქულაზე, მაშინ საგნის წლიური ქულა სამი (ორი - საგნის სემესტრული და ერთი - გამოცდის) ქულის საშუალო არითმეტიკულია (დამრგვალებული მთელის სიზუსტით);

დ) თუ მოსწავლეს, სკოლიდან სკოლაში სემესტრის მიმდინარეობისას გადასვლის გამო, მოუხდება განსხვავებული საგნების სწავლა და მანამდე ნასწავლ საგანში მიღებული აქვს 32-ე მუხ-

ლის მე-3 პუნქტით გათვალისწინებული შეფასება, რომლის საშუალო არითმეტიკული არის 5,0 ან მეტი ქულა, ეს ქულა დაუფიქსირდება ნასწავლი საგნის წლიურ ქულად. ამასთან, მიმღებმა სკოლამ უნდა შეაფასოს მოსწავლე ახალ განსხვავებულ საგანში, თუ ეს ესწრება სემესტრის დასრულებამდე;

ე) მოსწავლის მიერ სემესტრის დასრულების შემდეგ სკოლიდან სკოლაში გადასვლის გამო, მიმღებ სკოლაში განსხვავებული საგნის სწავლის შემთხვევაში, განსხვავებული საგნების სემესტრული ქულები აღირიცხება, როგორც ორი დამოუკიდებელი საგნის წლიური ქულა. (მაგ., თუ მოსწავლე პირველ სემესტრში უცხოურ ენად სწავლობდა ფრანგულს, მეორე სემესტრში კი ფრანგულის ნაცვლად - გერმანულს, მაშინ ფრანგული ენის სემესტრული ქულა გადადის ფრანგული ენის წლიურ ქულად, ხოლო გერმანული ენის სემესტრული ქულა - გერმანული ენის წლიურ ქულად).

3. საფეხურის ქულის გამოანგარიშების წესი:

ა) საფეხურის ქულის გამოთვლისას ჯამდება საფეხურის მანძილზე ნასწავლი ყველა საგნის წლიური ქულა და ჯამი იყოფა წლიური ქულების საერთო რაოდენობაზე;

ბ) საფეხურის ქულა მრგვალდება მეათედის სიზუსტით (მაგ., 6,43 მრგვალდება 6,4-მდე; 7,58 მრგვალდება 7,6-მდე; 9,75 მრგვალდება 9,8-მდე.).

მათემატიკა საბაზო საფეხურზე

შესავალი

საბაზო საფეხურის მათემატიკის სტანდარტი შედგება შემდეგი ნაწილებისაგან:
ა) საგნის სწავლა-სწავლების მიზნები;
ბ) სტანდარტის შედეგები და შინაარსი;
გ) მეთოდიკური ორიენტირები;
დ) შეფასება.

საბაზო საფეხურზე საგანი „მათემატიკა“ რიცხვებზე მოქმედებების, ალგებრის, გეომეტრიის, მონაცემთა ანალიზისა და სტატისტიკის, ალბათობის შესწავლას გულისხმობს.

საგნის სწავლა-სწავლებისას მოსწავლე ჩართული იქნება აქტივობებში, რომლებიც მას შეძენილი ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების საშუალებას მისცემს.

ა) საგნის სწავლა-სწავლების მიზნები

საბაზო საფეხურზე მათემატიკის სწავლების ძირითადი მიზნებია:

- მოსწავლე მათემატიკის მეშვეობით დაეუფლოს აბსტრაქტული, ლოგიკური და კრიტიკული აზროვნების ხერხებს;
- მოსწავლე დაეუფლოს მათემატიკის ენას - უნივერსალურ საშუალებას არა მარტო მათემატიკის, არამედ სხვა მეცნიერებებისა და სამყაროს შესაცნობად, ლოგიკური კავშირების/ბმების დასანახად;
- მოსწავლემ შეძლოს რეალური პრობლემების გადაჭრა მათემატიკური ინსტრუმენტების გამოყენებით.

ამ მიზნებზე მუშაობით მათემატიკა თავის წვლილს შეიტანს ეროვნული სასწავლო გეგმის მისიისა და მიზნებით გათვალისწინებული უნარებისა და ღირებულებების განვითარებასა და ჩამოყალიბებაში.

ბ) სტანდარტის შედეგები და შინაარსი

სტანდარტის შედეგები საგნის სწავლა-სწავლების მიზნებიდან გამომდინარეობს. ისინი პასუხობს შეკითხვას: რა უნდა შეეძლოს მოსწავლეს მათემატიკაში საბაზო საფეხურის ბოლოს.
შედეგები ჯგუფდება სამ მიმართულებად:
მსჯელობა-დასაბუთება - გულისხმობს ვარაუდების გამოთქმას, სრულად ან კერძო შემთხვევებში მათი მართებულობის კვლევას, საწყისი მონაცემების შერჩევასა და ორგანიზებას; არსებითი და არაარსებითი თვისებებისა და მონაცემების ერთმანეთისგან გამიჯვნას, დამტკიცების და დასაბუთების ხერხის შერჩევას, არჩეული სტრატეგიის ვარგისიანობისა და მისი გამოყენების საზღვრების განხილვას, მსჯელობის ხაზის განვითარებას, ალტერნატიული გზის მოძებნას საჭიროების შემთხვევაში, მიღებული გადაწყვეტილების სისწორისა და ეფექტიანობის დასაბუთებას, გამონაკლისი შემთხვევების აღნიშვნას და მათი განზოგადების არამართებულობის დასაბუთებას (მაგ., კონტრმაგალითის მოყვანით).

მათემატიკური ენა, კომუნიკაციის მათემატიკური ხერხები - გულისხმობს მათემატიკური ობიექტების განსაზღვრებებისა და თვისებების ჩამოყალიბებას, ტერმინების, აღნიშვნებისა და სიმბოლოების კორექტულად გამოყენებას, მათემატიკური შინაარსის ინფორმაციის წარმოდგენის ხერხებისა და მეთოდების ფლობას და გამოყენებას, სხვადასხვა გზით წარმოდგენილი ინფორმაციის ინტერპრეტაციას და ერთმანეთთან დაკავშირებას; სხვისი ნააზრევის გაგებასა და გაანალიზებას,

ინფორმაციის მიღებისა და გადაცემის შესაფერისი საშუალებების შერჩევას აუდიტორიისა და საკითხის გათვალისწინებით, ინფორმაციის გადაცემისას საკითხის არსის წარმოჩენას;

მათემატიკური მოდელირება, პრობლემების გადაჭრა - გულისხმობს ჩვეულ გარემოში ყოველდღიურ ცხოვრებაში არსებულ ობიექტებსა და პროცესებში მათემატიკური ობიექტების მოდელებისა და მიმართებების აღმოჩენას, მათი თვისებების გამოყენებას პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრისას, ამოცანის შინაარსის აღქმას, ამოცანის მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების გააზრება-გამიჯვნას, პრობლემის განსაზღვრასა და მის ჩამოყალიბებას მათემატიკურ ენაზე; კომპლექსური პრობლემის საფეხურებად, მარტივ ამოცანებად დაყოფას და ეტაპობრივად გადაჭრას, მიღებული შედეგების კრიტიკულ შეფასებას კონტექსტის გათვალისწინებით, პრობლემის გადაჭრას ადეკვატური დამხმარე ტექნიკური საშუალებებისა და ტექნოლოგიების გამოყენებით.

სტანდარტის შინაარსი განსაზღვრავს, რა უნდა იცოდეს მოსწავლემ. შინაარსი აღიწერება სავალდებულო ცნებების, თემატური ჩარჩოს, საგნობრივი საკითხების სახით.

სტანდარტის შედეგების ინდექსების განმარტება

საბაზო საფეხურზე სტანდარტში გაწერილ თითოეულ შედეგს წინ უძღვის ინდექსი, რომელიც მიუთითებს საგანს, სწავლების ეტაპსა და სტანდარტის შედეგის ნომერს; მაგ., **მათ.საბ.1.:**

„მათ.“ - მიუთითებს საგანს „მათემატიკა“;

„საბ.“ - მიუთითებს საბაზო საფეხურს;

„**1“ -** მიუთითებს შედეგის ნომერს.

მათემატიკის სტანდარტის შედეგები	
შედეგების ინდექსი	**მიმართულება: მსჯელობა-დასაბუთება**
მოსწავლემ უნდა შეძლოს:	
მათ.საბ.1.	მათემატიკური ან სხვა საგნებიდან მომდინარე ამოცანების განხილვისას ჰიპოთეზების ჩამოყალიბება, მათი მართებულობის დადგენა ან უარყოფა;
მათ.საბ.2.	მსჯელობის ხაზის განვითარება; განზოგადებით ან დედუქციით მიღებული დასკვნების დასაბუთება.
მიმართულება: მათემატიკური ენა, კომუნიკაციის მათემატიკური ხერხები	
მოსწავლემ უნდა შეძლოს:	
მათ.საბ.3.	მათემატიკური ობიექტების განსაზღვრებებისა და თვისებების სწორად ჩამოყალიბება; მათემატიკური ტერმინების, აღნიშვნებისა და სიმბოლოების კორექტულად გამოყენება.
მათ.საბ.4.	მათემატიკურ დებულებათა ფორმულირების ხერხების კორექტულად გამოყენება;
მათ.საბ.5.	გრაფიკულად გადმოცემული მათემატიკური შინაარსის ინფორმაციის წაკითხვა; მათემატიკური ობიექტების გრაფიკული ხერხით (გრაფიკების, დიაგრამების და ნახაზების სახით) წარმოდგენა.
მიმართულება: მათემატიკური მოდელირება, პრობლემების გადაჭრა	
მოსწავლემ უნდა შეძლოს:	
მათ.საბ.6.	ყოველდღიურ ცხოვრებაში არსებულ ობიექტებსა და პროცესებში მათემატიკური ობიექტების მოდელებისა და მიმართებების შემჩნევა და მათი თვისებების გამოყენება მოდელის აგებისას, პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრისას;

მათ.საბ.7.	ამოცანის შინაარსის აღქმა, ამოცანის მონაცემებისა და საძიებელი სიდიდეების გააზრება-გამიჯვნა, პრობლემის გამოკვეთა და მისი ჩამოყალიბება;
მათ.საბ.8.	კომპლექსური (რთული) პრობლემის საფეხურებად, მარტივ ამოცანებად დაყოფა და ეტაპობრივად გადაჭრა/ამოხსნა;
მათ.საბ.9.	ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული შედეგის კრიტიკული შეფასება ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით.

მოსწავლეებში აღნიშნული უნარების ჩამოყალიბება და განვითარება შესაძლებელია მათემატიკის პროგრამის შინაარსის მეშვეობით, რომლის ძირითადი სფეროებია: **რიცხვები და მათზე მოქმედებები; ალგებრა; გეომეტრია; მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა, ალბათობა.**

თემატური ჩარჩო საბაზო საფეხურის სასწავლო თემებისათვის

- რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში და მეცნიერების სხვა დარგებში;
- რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელები;
- გარემომცველი სამყარო და გეომეტრიული ობიექტები.
- მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი.

რიცხვები და მათზე მოქმედებები

ცნებები და საკითხები:

რიცხვის ჩაწერის სისტემები: რიცხვის ჩაწერის პოზიციური და არაპოზიციური სისტემები. ათობითი და ორობითი პოზიციური სისტემები. რომაული და ძველი ქართული ნუმერაცია.

ნატურალური რიცხვები, მთელი რიცხვები

არითმეტიკული მოქმედებები მთელ რიცხვებზე.

რაციონალური რიცხვები

რაციონალური რიცხვების წარმოდგენა წილადებისა და ათწილადების სახით (მათ შორის, უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით). არითმეტიკული მოქმედებები რაციონალურ რიცხვებზე. რიცხვების შედარება და არითმეტიკული მოქმედებების შედეგის შეფასება. რიცხვითი გამოსახულებები, მოქმედებათა თანმიმდევრობა რიცხვით გამოსახულებებში, არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები.

ირაციონალური რიცხვები

ირაციონალური რიცხვის არსებობა ($\sqrt{2}$ -ის ირაციონალობა, π რიცხვი).

რიცხვითი წრფე. რიცხვითი შუალედები

რიცხვის გამოსახვა რიცხვით წრფეზე. რიცხვითი შუალედები.

რიცხვის მოდული

მოდულის ძირითადი თვისებები და მისი გეომეტრიული აზრი.

პროპორცია.

პროპორციის თვისებები, პროპორციის უცნობი წევრის პოვნა, რიცხვის დაყოფა მოცემული შეფარდებით, სიდიდეებს შორის პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

რიცხვის პროცენტი, ნაწილი

რიცხვის პროცენტისა და ნაწილის პოვნა. რიცხვის პოვნა მისი პროცენტით ან ნაწილით, რიცხვის ჩაწერა პროცენტის სახით.

ნაშთი. ნაშთთა არითმეტიკა

ნაშთი. ნაშთთა არითმეტიკის ელემენტები *(იგულისხმება ნაშთის მარტივი თვისებები: რისი ტოლია ჯამის ნაშთი, ნამრავლის ნაშთი და ა.შ.)*

ხარისხი

ხარისხი ნატურალური და მთელი მაჩვენებლით, ნამრავლის, შეფარდების და ხარისხის ახარისხება. ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი და შეფარდება. რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმა.

არითმეტიკული ფესვი (კვადრატული და კუბური)

კვადრატული და კუბური ფესვების ძირითადი თვისებები. ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გამარტივება.

ზომის ერთეულები: სიგრძის, ფართობის, მოცულობის, მასის, დროის, კუთხის, სიჩქარის ერთეულები.

პროცედურები:

- რიცხვების წარმოდგენის მეთოდები, რიცხვების კლასიფიკაცია და მათი ადეკვატურად გამოყენება სხვადასხვა ასპექტში.
- ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება; რიცხვებზე მოქმედებებს შორის კავშირების ახსნა და მოქმედებათა თვისებების დასაბუთება.
- რაოდენობების შეფასებისა და შედარების სხვადასხვა ხერხების გამოყენება, რიცხვებზე მოქმედების შედეგის მიახლოებით შეფასება, რიცხვების დამრგვალება.
- ზომის სხვადასხვა ერთეულის ერთმანეთთან დაკავშირება და გამოყენება (მათ შორის რეალურ ვითარებაში).
- პრაქტიკულ საქმიანობასთან დაკავშირებული და/ან სხვა სასწავლო დისციპლინებიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა გამოთვლებზე (მათ შორის ტექნოლოგიების გამოყენებით).

საკვანძო შეკითხვები:

- რით განსახვავდება და როგორ ურთიერთკავშირშია ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლეები: ნატურალური რიცხვები, მთელი რიცხვები, რაციონალური რიცხვები, ირაციონალური რიცხვები, კენტი რიცხვები, ლუწი რიცხვები, დადებითი და უარყოფითი რიცხვები, მარტივი და შედგენილი რიცხვები?
- რაში მდგომარეობს რიცხვის ჩაწერის პოზიციური სისტემის არსი? რა განაპირობებს იმ ფაქტს, რომ მეცნიერების და ტექნიკის გარკვეულ მიმართულებებში იყენებენ სხვადასხვა ფუძიან პოზიციურ სისტემებს?
- როგორ გვეხმარება რიცხვებზე მოქმედებათა თვისებები რიცხვითი გამოსახულებების მნიშვნელობის გამოთვლისას?
- არის თუ არა რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის შეფასება ზუსტი პასუხის პოვნაზე უფრო შესაფერისი გარკვეულ ვითარებებში?
- რითია სასარგებლო ხარისხის თვისებების ცოდნა მათემატიკური და რეალური ვითარებიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნისას?
- როგორ გამოვიყენებთ რიცხვების თვისებებს პირადი ხარჯთაღრიცხვის წარმოებასთან დაკავშირებული ან მეცნიერების სხვა დარგებიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნისას?

ალგებრა

ცნებები და საკითხები:

სიმრავლე. სიმრავლეებს შორის მიმართებები. მოქმედებები სიმრავლეებზე.

ქვესიმრავლე, ორი სიმრავლის ტოლობა *(იგულისხმება, რომ, მაგ., დასაბუთდეს ორი სხვადასხვა აღწერით მოცემული სიმრავლეების ტოლობა)*, ცარიელი სიმრავლე. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები *(მთელი რიცხვების მაგალითზე)*. სიმრავლეთა გაერთიანება, თანაკვეთა.

ალგებრული გამოსახულებები: ასოითი აღნიშვნების გამოყენება, ცვლადი, უცნობი სიდიდე, ფორმულა; ალგებრული გამოსახულება, მისი რიცხვითი მნიშვნელობები, იგივურად ტოლი გამოსახულებები.

მრავალწევრები

მრავალწევრების შეკრება, გამოკლება, გამრავლება. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები.

ალგებრული წილადები

წილადის ძირითადი თვისება, ალგებრული წილადების შეკვეცა, შეკრება, გამოკლება (იგულისხმება მარტივი შემთხვევები, როცა, მაგ. საერთო მნიშვნელის მოძებნა არ არის რთული), გამრავლება და გაყოფა.

განტოლებები

იგივეობის, განტოლების ცნებები, განტოლების ამონახსნი, ეკვივალენტური განტოლებები. გარდაქმნები, რომელთაც მივყავართ ეკვივალენტურ განტოლებამდე.

წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება.

განტოლების ფესვი. წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნა. წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით.

წრფივ განტოლებათა სისტემა.

ორუცნობიანი ერთი განტოლების ამონახსნები. განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ცნება. ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნა. ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სიტემის შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით.

კვადრატული განტოლება და კვადრატული სამწევრი.
კვადრატული სამწევრი და მისი კოეფიციენტები. არასრული კვადრატული განტოლებები და მათი ამოხსნის ხერხები. სრული კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულა. ვიეტის თეორემა კვადრატული განტოლების ფესვების შესახებ. წილად-რაციონალური განტოლებების ამოხსნა, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანება *(იგულისხმება უმარტივესი შემთხვევები)*. კვადრატული განტოლების გამოკვლევა მისი დისკრიმინანტის საშუალებით. კვადრატული განტოლების შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით.
უტოლობები.
რიცხვითი უტოლობები და მათი თვისებები. წრფივი უტოლობებისა და ერთუცნობიანი ორი წრფივი უტოლობის სიტემის ამოხსნა. წრფივი და ერთუცნობიანი ორი წრფივი უტოლობის სიტემის შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით.
კოორდინატთა სისტემა
წერტილის კოორდინატები ღერძზე, დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, წერტილის კოორდინატები სიბრტყეზე.
სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება. ფუნქციები (წრფივი, კვადრატული, უკუპროპორციულობის)
სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება და ამ დამოკიდებულების გამოსახვა ცხრილის, დიაგრამის, გრაფიკის, ფორმულის (განტოლების) საშუალებით.
პირდაპირპროპორციულობის დამოკიდებულება და მისი გამოსახვა დიაგრამის, ცხრილის, გრაფიკის და განტოლების საშუალებით. წრფივ დამოკიდებულობათა რეალური მაგალითები.
რიცხვითი ფუნქციის ცნება, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, ფუნქციის მოცემის ხერხები, ფუნქციის გრაფიკის ცნება, ღერძებთან კვეთები.
ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით შემდეგ ცნებათა ინტერპრეტაცია: ფუნქციის ზრდადობა, კლებადობა, მუდმივობა, ნიშანმუდმივობის შუალედები, ნულები, ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მოცემულ შუალედზე.
რიცხვითი მიმდევრობები: მიმდევრობის ზრდადობა, კლებადობა, შემოსაზღვრულობა. არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები.
პროცედურები:

- განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნათა ხერხები, მოქმედებების შესრულება ალგებრულ გამოსახულებებზე, მოვლენების და პროცესების ალგებრული მოდელების შედგენა და პრობლემების გადაჭრა ალგებრული ტექნიკის გამოყენებით.
- სიმრავლური ცნებების და ოპერაციების გამოყენება;
- სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებების აღწერა და წარმოდგენა ასახვების (ფუნქციების) მეშვეობით;
- მოვლენების და პროცესების ფუნქციური მოდელების შედგენა და პრობლემების გადაჭრა ფუნქციათა თვისებების კვლევის გამოყენებით.

საკვანძო შეკითხვები:
- როდის გამოიყენება ალგებრული და რიცხვითი გამოსახულებები?
- როგორ უნდა ჩაიწეროს მათემატიკურ ენაზე ჩვეულებრივ ენაზე (ვერბალურად) აღწერილი ამოცანა?
- როგორ ვქმნით რეალური ვითარების მათემატიკურ მოდელს? როგორ ვამოწმებთ და ვადასტურებთ მის მართებულობას?
- ყოველთვის ემთხვევა თუ არა რეალური ვითარების და ამ ვითარების მათემატიკური მოდელის ამონახსნები ერთმანეთს? ახსენით თქვენი მოსაზრება და მოიყვანეთ მაგალითები.
- როგორ გამოიყენებთ ფუნქციების თვისებებს ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულების შესასწავლად?
- რა გრაფიკული და ალგებრული მეთოდები გამოიყენება ფუნქციების თვისებების შესასწავლად?
- მნიშვნელოვანია თუ არა კანონზომიერებების შემჩნევა და აღწერა ჩვენს გარემომცველ სამყაროში?
- როგორ გამოიყენებთ მიმდევრობებს რეალურ ვითარებებში კანონზომიერებების შესასწავლად და აღსაწერად?

გეომეტრია
ცნებები და საკითხები:
ლოგიკის ელემენტები
ცნება, ნიშანი, განსაზღვრება, მსჯელობა, დასკვნა.

ძირითადი გეომეტრიული ობიექტი

წერტილი, წრფე, სიბრტყე, ბრტყელი და სივრცული ფიგურა, მონაკვეთი, სხივი, ტეხილი, მრუდი.

კუთხეები

სრული, გაშლილი, მოსაზღვრე, ვერტიკალური, მართი კუთხეები. კუთხის ბისექტრისისა და მონაკვეთის შუამართობის თვისებები. წრფეთა პარალელობის და მართობულობის ცნებები, თვისებები და ნიშნები.

სამკუთხედები

სამკუთხედი, მისი ელემენტები, სამკუთხედთა კლასიფიკაციები გვერდებისა და კუთხეების მიხედვით. დამოკიდებულება სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის, სამკუთხედის უტოლობა, სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. სამკუთხედის გარე კუთხე. სამკუთხედთა ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები და ნიშნები. პითაგორას თეორემა. მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. მართკუთხა სამკუთხედების ამოხსნა.

სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

თალესის თეორემა. სამკუთხედთა მსგავსების ცნება, მსგავსების კოეფიციენტი. მსგავსების ნიშნები. მსგავს სამკუთხედთა პერიმეტრების და ფართობების შეფარდება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების გამოყენებები.

ოთხკუთხედები

მართკუთხედის, პარალელოგრამის, რომბის, ტრაპეციის თვისებები და ნიშნები. მართკუთხედის, პარალელოგრამის, ტრაპეციის ფართობი.

წრეწირი და წრე

წრეწირის მხები, მკვეთი, ქორდა, მხებისა და ქორდის თვისებები. წრეწირთან დაკავშირებულ კუთხეთა ზომები. წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი, რკალის სიგრძე, სექტორის ფართობები.

თეორემები სამკუთხედში ჩახაზულ და მასზე შემოხაზულ წრეწირთა ცენტრების და რადიუსების შესახებ.

აგების უმარტივესი ამოცანები.

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები სიბრტყეზე.

მართკუთხა კოორდინატების შემოღება სიბრტყეზე. მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები. ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსახვა დეკარტის კოორდინატებში.

გეომეტრიული გარდაქმნები.

ღერძული და ცენტრული სიმეტრიები, მობრუნება, პარალელური გადატანა.

ვექტორები

მოქმედებები ვექტორებზე - სკალარზე გამრავლება, შეკრება, სხვაობა ვექტორის დაშლა ჯამად მიმართულებების მიხედვით.

სივრცითი ფიგურები

მართი პრიზმა, პარალელეპიპედი, პირამიდა, ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი.

სივრცული ფიგურის შლილი (პრიზმა, პირამიდა, ცილინდრი, კონუსი).

სივრცული ფიგურის ზედაპირის ფართობი (მართკუთხა პარალელეპიპედი, პირამიდა, ცილინდრი).

სივრცული ფიგურის მოცულობა (მართკუთხა პარალელეპიპედი).

პროცედურები:

- გეომეტრიულ ფიგურათა განმარტება, წარმოდგენა (მაგ, დახაზვა, მათ შორის ტექნოლოგიების გამოყენებით) და ამოცნობა, მათი სახეობების შედარება და კლასიფიცირება; ფიგურათა თვისებების შესწავლა (ჰიპოთეზის ჩამოყალიბება, მისი დამტკიცება ან უარყოფა) და მათი გამოყენება თეორიულ და პრაქტიკულ ამოცანებში.
- კოორდინატთა მეთოდი; გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება თეორიულ და პრაქტიკულ ამოცანებში.
- ვექტორებზე მოქმედებების შესრულება და ვექტორების გამოყენება გეომეტრიული და საბუნებისმეტყველო პრობლემების გადაჭრისას.

საკვანძო შეკითხვები:

- როგორ გამოიყენებთ გეომეტრიულ ფიგურებს ჩვენი გარემომცველი ობიექტების აღწერისას?
- რა განსხვავებაა ფიგურის აღწერას, დახასიათებას და განსაზღვრებას შორის?
- როგორ ფიქრობთ, რა შემეცნებითი ღირებულება აქვს მსჯელობას?
- რა ხერხებს გამოიყენებთ ფიგურათა სახეობებს შორის მიმართებების გამოსახვის მიზნით?
- როგორ შეიძლება კოორდინატთა მეთოდის გამოყენება სიბრტყეზე ორიენტირებისათვის?
- სად და როგორ შეიძლება გეომეტრიული გარდაქმნების გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში?

მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა, ალბათობა

ცნებები და საკითხები:

მონაცემთა წარმოდგენა. მონაცემთა მოწესრიგებული ერთობლიობების რაოდენობრივი და თვისებრივი ნიშნები: მონაცემთა რაოდენობა, პოზიცია და თანმიმდევრობა ერთობლიობაში, მონაცემთა სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე; განმეორების ტიპის კანონზომიერებანი; გამორჩეული (მაგალითად: ექსტრემალური, იშვიათი) მონაცემები.

მონაცემთა წარმოდგენის საშუალებანი რაოდენობრივი და თვისებრივი მონაცემებისთვის: სია, ცხრილი, პიქტოგრამა, წერტილოვანი, ხაზოვანი, სვეტოვანი, წრიული დიაგრამები.

მონაცემთა მახასიათებლებლები

ცენტრალური ტენდენციის საზომები (საშუალო, მედიანა, მოდა). მონაცემთა გაფანტულობის საზომი - გაბნევის დიაპაზონი.

ალბათობა

ვარიანტების დათვლის ხერხები, ხდომილობა; ელემენტარული და თანაბრადმოსალოდნელი, აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობები, ალბათობა.

პროცედურები:

- დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო თვისებრივი და რაოდენობრივი მონაცემების მოპოვება;
- მონაცემების მოწესრიგება და წარმოდგენა (მათ შორის ტექნოლოგიების გამოყენებით) დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით.
- თვისებრივ და რაოდენობრივ მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით და დასკვნების ჩამოყალიბება.
- ალბათური მოდელებისა და ალბათობის თვისებების აღწერა; მათი გამოყენება შემთხვევითი მოვლენების აღწერისას.

საკვანძო შეკითხვები:

- როგორ და რატომ ვაგროვებთ მონაცემებს?
- როგორ შეგვიძლია მონაცემების დახარისხება და წარმოდგენა?
- როგორ გეხმარება დიაგრამები, ცხრილები და გრაფიკები მონაცემების ინტერპრეტაციაში?
- როგორ დგინდება და გადმოიცემა ხდომილობის სავარაუდობა?

იმისათვის, რომ მოსწავლეებს განუვითარდეთ კრეატიული აზროვნება და შეძლონ მათემატიკის სილამაზის და საჭიროების დანახვა, საჭიროა, თითოეული თემა იყოს უფრო ფართოდ გააზრებული, რაშიც დაგვეხმარება გარკვეული მკვიდრი წამროდგენები. თემატური, (დიდი, მთავარი) მკვიდრი წარმოდგენები წარმოადგენენ ძლიერ ორგანიზებულ იდეებს, რომლებიც არ არიან ჩაკეტილნი კონკრეტულ სივრცეში, მიმართულებაში, დროსა და სიტუაციაში და არის უფრო ზოგადი და ფართო გაგების. ფაქტობრივი ცოდნა და უნარები გამოიყენებული უნდა იყოს, როგორც საფუძველი, ღრმა სააზროვნო უნარებისა და გაგებების ჩამოსაყალიბებლად, რომელიც გამოვლინდება საკითხის ანალიზისა და კვლევის დროს.

თეამტური (დიდი, მთავარი) მკვიდრი წარმოდგენებია: ფორმა; დამოკიდებულება; გამარტივება; კავშირები; ლოგიკა; მსჯელობა; სივრცე; წარმოდგენა; კანონზომიერება; ნიმუში;

VIII კლასი - სარეკომენდაციო ნაწილი

<table>
<tr><td colspan="3">თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში და მეცნიერების სხვა დარგებში
თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: ფორმა; წარმოდგენა.</td></tr>
<tr><td>ზოგადი ცნებები</td><td>ცნებები</td><td>საკითხები</td></tr>
<tr><td>რიცხვები</td><td>✓ რაციონალური რიცხვი;
✓ რაციონალური რიცხვის მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი.
✓ ირაციონალური რიცხვი.
✓ არითმეტიკული ფესვი რიცხვიდან.
✓ კუბური ფესვი რიცხვიდან
✓ სამომხმარებლო არითმეტიკა;</td><td>მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი:
• მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი; თვისებები;
• ნამრავლის, ფარდობის, ხარისხის ახარისხება; ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი და შეფარდება
• ხარისხების შედარება
• რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმა და მისი კავშირი პოზიციურ სისტემასთან;
ფესვი:
• არითმეტიკული ფესვი რიცხვიდან; თვისებები; არითმეტიკული ფესვის შემცველი გამოსახულებების გამარტივება;
• ირაციონალური რიცხვი;
• კუბური ფესვი რიცხვიდან. რიცხვებისა და რიცხვითი გამოსახულებების (მათ შორის ხარისხების ან არითმეტიკული ფესვების შემცველი გამოსახულებების) შედარება;

სამომხმარებლო არითმეტიკა:
• კურსი და ვალუტის გადაცვლა;
• მარტივი ხარჯთაღრიცხვა;
• დღგ - დამატებითი ღირებულების გადასახადი;
• ფასის ცვალებადობა (ფასის ზრდა და ფასდაკლება);
• მარტივად დარიცხული პროცენტი;</td></tr>
<tr><td colspan="3">საკვანძო შეკითხვები:
• როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რიცხვების თვისებები ორი სამომხმარებლო კონტრაქტიდან ან მომსახურების გეგმიდან უკეთესის შესარჩევად?
• როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რიცხვების თვისებები ბუნებისმეტყველების დარგებიდან მომდინარე გამოთვლებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას?</td></tr>
<tr><td colspan="3">შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს:</td></tr>
</table>

• პოზიციური სისტემის და რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმის გამოყენება **(მათ.საბ.4,5);** • რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მათი შედეგის შეფასება **(მათ.საბ.1,2,3,4,5);** • მსჯელობა-დასაბუთების ზოგიერთი ხერხის გამოყენება **(მათ.საბ.1,2,3);** • გამოთვლებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა **(მათ.საბ.7,8,9).**

<table>
<tr><th colspan="3">თემა: ალგებრა, ალგებრული გამოსახულებები (ალგებრა და მათემტიკური მოდელები)
თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: დამოკიდებულება; გამარტივება; კავშირები;</th></tr>
<tr><th>ზოგადი ცნებები</th><th>ცნებები</th><th>საკითხები</th></tr>
<tr><td>წრფივი დამოკიდებულება;</td><td>სიდიდეთა შორის წრფივი დამოკიდებულება</td><td>• წრფივი დამოკიდებულება და მისი გამოსახვა გრაფიკის, ცხრილის და განტოლების საშუალებით.</td></tr>
<tr><td>ალგებრული გამოსახულებები;</td><td>ალგებრული გამოსახულებები; მოქმედებები;</td><td>• ალგებრული გამოსახულებების გამარტივება;
• ორწევრი და სამწევრის ნამრავლად დაშლა
• მოქმედებები წილადის შემცველი ალგებრული გამოსახულებებზე;</td></tr>
<tr><td>განტოლებები და უტოლობები</td><td>ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა;

ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობა</td><td>განტოლებათა სისტემები;
• ორუცნობიანი განტოლება; განტოლებათა სისტემა; ამონახსნთა სიმრავლის ცნებები; ტოლფასი განტოლებები;
• ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა და ამოხსის გზები (ჩასმა, შეკრება, გრაფიკული).
• წრფივ განტოლებათა სისტემები და მათი გამოყენება ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას.
• ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სიტემის შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით;
უტოლობები
• ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობები;
• უტოლობის ამოხსნა რიცხვითი ღერძის მეშვეობით;
• ამოცანების ამოხსნა უტოლობის გამოყენებით.</td></tr>
<tr><td colspan="3">შეკითხვები:
• შეგიძლიათ თუ არა დაასახელოთ ნაცნობ სიდიდეთაგან ისეთები, რომელთა შორისაც წრფივი დამოკიდებულებაა?
• რომელი მათგანი მეუბნება უფრო მეტს ჩემს მიერ შესასწავლ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულებაზე - ცხრილი, ნახაზი თუ ფორმულა?
• როგორ უნდა შევადგინოთ და ამოვხსნათ ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობები ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას და რეალური ვითარების მოდელირებისას?
• რითი განსხვავდება განტოლებისა და უტოლობის ამონახსნები?
• როგორ უნდა ამოვიცნოთ, გავაანალიზოთ და გამოვსახოთ წრფივი დამოკიდებულება ყოველდღიური ცხოვრებიდან ნაცნობი სიდიდეების დამოკიდებულებებს შორის?</td></tr>
<tr><td colspan="3">შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს:
• ვერბალურად აღწერილი სიტუაციის ალგებრული გამოსახულების (ფორმულის) სახით ჩაწერა (მათ.საბ.4,5,6,7,8,9);
• ალგებრული გამოსახულების გამარტივება და მათი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა ცვლადთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის (მათ.საბ.4,5);
• განტოლების ამოხსნა და ამონახსნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (მათ.საბ.2,3,4,5);</td></tr>
</table>

• განტოლებების შედგენა ვერბალურად მოცემული ამოცანის შესაბამისად, განტოლების შესაბამისი ამოცანის შედგენა **(მათ.საბ.3,4,7,8,9);** • სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულების ამოცნობა, გაანალიზება და გამოსახვა **(მათ.საბ.3,4,5);** • ორ სიმრავლეს შორის შესაბამისობის აგება, გამოსახვა და გამოკვლევა **(მათ.საბ.3,4,7,8,9).**

თემა: გარემომცველი სამყარო და გეომეტრიული ობიექტები **თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წრმოდგენა: ლოგიკა; მსჯელობა; სივრცე;**		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**
ლოგიკური მსჯელობა, არგუმენტირება	✓ აქსიომა ✓ თეორემა	• აქსიომა, თეორემა • ლოგიკუირ მსჯელობა „თუ-მაშინ“ წინადადებები;
გეომეტრიული ფიგურები	✓ ბრტყელი ფიგურა ✓ სივრცითი ფიგურა	**წრფეები** • წრფეთა მართობულობა; • ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები და კუთხეების თვისებები; • თალესის თეორემა; **სამკუთხედები** • სამკუთხედის შიდა კუთხეების ჯამი. • სამკუთხედის ელემენტები: მედიანა, ბისექტრისა, სიმაღლე და მათი თვისებები. სამკუთხედის შუახაზი და მისი თვისება. • ტოლფერდა/ტოლგვერდა სამკუთხედის თვისებები. • პითაგორას თეორემა **ოთხკუთხედები** • პარალელოგრამი. პარალელოგრამის თვისებები. • მართკუთხედი. მართკუთხედის თვისებები. • რომბი. რომბის თვისებები; • ტრაპეციის ელემენტები: ფუძე, ფერდი, სიმაღლე, შუახაზი. ტრაპეციის კერძო სახეები: ტოლფერდა ტრაპეცია, მართკუთხა ტრაპეცია და მათი თვისებები;
გაზომვები	✓ კუთხე ✓ ფართობი ✓ მოცულობა	• კუთხის ზომა; • ფართობი; • მოცულობა • ტრიგონომეტრიული ფარდობები **ტრიგონომეტრიული ფარდობები** • მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი. მართკუთხა სამკუთხედების ამოხსნა. **ბრტყელი ფიგურების ფართობი** • მართკუთხედის, პარალელოგრამის, ტრაპეციის, წრის, ფართობი. **სივრცული ფიგურები, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა** • პრიზმა, პირამიდა, ცილინდრი • მართი პრიზმისა, წესიერი პირამიდის. ცილინდრის ზედაპირის ფართობი; **მოცულობა**

		• მოცულობა, მოცულობის თვისება: სხეულის მოცულობა ამ სხეულის შემადგენელი ნაწილების მოცულობების ჯამის ტოლია;
გეომეტრიული გარდაქმნები	✓ საკოორდინატო გეომეტრია ✓ მობრუნება	**საკოორდინატო გეომეტრია** • კოორდინატთა სისტემა: სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსახვა კოორდინატებში. • კოორდინატების გამოყენება ფიგურათა თვისებების კვლევაში; **გადაქმნები** • გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე: მობრუნება.

შეკითხვები:
- როგორ შეგვიძლია ერთი ფიგურის გამოყენება მეორის ფართობის დასადგენად?
- როგორ გავზომოთ ფიგურის ფართობი ამ ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გარეშე?
- როგორ უნდა გამოვიყენოთ ალგებრული გარდაქმნები, ტოლობისა და უტოლობების თვისებები გეომეტრიულ დებულებათა დასაბუთებისას?
- როგორ შეიძლება გეომეტრიული ფიგურების თვისებების გამოყენება ჩვენი გარემომცველი საგნების და მათი ელემენტების ზომების მოსაძებნად?

შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს:
- ფიგურათა თვისებების გამოყენება ფიგურათა კლასიფიცირებისათვის და მათი სახეობების შესადარებლად **(მათ.საბ.3,4,7,8,9);**
- ფიგურისა და მისი ელემენტების ზომების მოძებნა **(მათ.საბ.1,2,5,6,7);**
- გეომეტრიული დებულებების მართებულობის დასაბუთება **(მათ.საბ.1,2,3).**

მიმართულება: სტატისტიკა და ალბათობა; **თემა: მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი;** **თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენა: კავშირები; წარმოდგენა; კანონზომიერება;**		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**
სტატისტიკა **მონაცემები**	✓ სიხშირე; ✓ დიაგრამები	**მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი:** • მონაცემთა შეგროვების საშუალებანი: კითხვარის/ანკეტის შედგენა და რესპონდენტთა გამოკითხვა (წარმომადგენლობითი ჯგუფის შერჩევის გარეშე); • მონაცემთა მოწესრიგებული ერთობლიობების რაოდენობრივი და თვისებრივი ნიშნები: მონაცემთა სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე, მონაცემთა წარმოდგენის საშუალებანი: წრიული დიაგრამა ფარდობითი სიხშირის დიაგრამა (ჰისტოგრამა) და შედარებები; რომელი უპირატესია და რა დროს.
ალბათობა **ხდომილობები**	✓ აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობები;	**ალბათობა** • ალბათობა; ელემენტალური ხდომილობების სივრცე; • შემთხვევითი ექსპერიმენტი, აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობები; • შემთხვევითობის წარმოქმნელი მოწყობილობები - მონეტა, ურნა, კამათელი, რულეტი; ელემენტალური ხდომილობები;

შეკითხვები: • რამდენად მნიშვნელოვანია დასკვნების მართებულობისთვის მონაცემების შეგროვების შესაფერისი საშუალებების გამოყენება? • რა განაპირობებს თვისებრივი და რაოდენობრივი მონაცემების წარმოდგენის ხერხის შერჩევას? • როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რაოდენობრივ მონაცემთა ანალიზის შედეგები ყოველდღიურ ცხოვრებაში?
შეფასების ინდიკატორები - <u>მოსწავლემ უნდა შეძლოს:</u> • ამოცანის ამოსახსნელად (პრობლემის გადასაჭრელად) საჭირო მონაცემების მოპოვება **(მათ.საბ.4,7,8,9);** • მონაცემების მოწესრიგება და წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით**(მათ.საბ.4,5,6).**

მათემატიკა – წლიური პროგრამა

მათემატიკა

საბაზო საფეხურის წლიური პროგრამები

საბაზო საფეხურის მათემატიკის პროგრამა სარეკომენდაციო ხასიათისაა და აჩვენებს სტანდარტის მოთხოვნათა რეალიზების შესაძლო გზებს. პროგრამა შედგება შემდეგი ნაწილებისაგან:

სასწავლო თემა

სასწავლო თემა წარმოადგენს ფუნქციურ კონტექსტს, რომელიც სტანდარტის შედეგების, ცნებებისა თუ კონკრეტული საკითხების ინტეგრირებულად და ურთიერთდაკავშირებულად სწავლების საშუალებას იძლევა. თითოეული თემის ფარგლებში, შეძლებისდაგვარად, უნდა დამუშავდეს სტანდარტის ყველა შედეგი.

საგნობრივი საკითხები

წლიური თემების ფარგლებში გამოიყოფა საგნობრივი საკითხები. საგნობრივი საკითხების სწავლება თვითმიზანს არ წარმოადგენს.

საგნობრივი საკითხების მეშვეობით მოსწავლე გაიაზრებს ცნების შინაარსს, ამუშავებს საკვანძო შეკითხვებს, ასრულებს კომპლექსურ დავალებებს.

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი ცნებები

ცნებები განსაზღვრავს იმ არსებით ცოდნას, რომელსაც მოსწავლე საგნის ფარგლებში უნდა დაეუფლოს.

თემატური საკვანძო შეკითხვები

თემატური საკვანძო შეკითხვები გამომდინარეობს საფეხურებრივი საკვანძო შეკითხვებიდან და დაისმის თემის კონკრეტულ კონტექსტში. მათი ფუნქციაა:

- მოსწავლის წინარე ცოდნის გააქტიურება, ცნობისმოყვარეობის გაღვივება, პროვოცირება ახალი ცოდნის შესაძენად;
- სასწავლო თემის შედეგზე ორიენტირებულად სწავლა-სწავლების უზრუნველყოფა;
- თემის სწავლა-სწავლების პროცესში შუალედური ბიჯების/ეტაპების განსაზღვრა. საკვანძო შეკითხვა წარმოადგენს მაორგანიზებელ ელემენტს, რომელმაც სასწავლო თემის ფარგლებში შესაძლოა გაკვეთილ(ებ)ის მიზნის როლი შეასრულოს.

აქტივობები

დავალებების ტიპები/ნიმუშების ჩამონათვალი, რომლებიც გამოიყენება გაგება-გააზრებისა და შეჯამების პროცესების, ასევე ცოდნის ათვისების, განმტკიცებისა თუ შეჯამების მიზნით.

კომპლექსურ/პროექტულ დავალებათა იდეების ჩამონათვალი

კომპლექსური/პროექტული დავალებები წარმოადგენს იმგვარ აქტივობებს, რომელთა შესრულება მოითხოვს სხვადასხვა ცოდნათა ინტეგრირებულად გამოყენებას ფუნქციურ კონტექსტებში.

შეფასების ინდიკატორები

შეფასების ინდიკატორები სტანდარტის შედეგებიდან გამომდინარეობს და აჩვენებს, რა უნდა შეძლოს მოსწავლემ კონკრეტული თემის ფარგლებში. სხვა სიტყვებით, ინდიკატორები წარმოადგენს კონკრეტულ თემაში რეალიზებულ შედეგებს. ინდიკატორებში დაკონკრეტებულია ცოდნის ის სავალდებულო მინიმუმი, რომელსაც მოსწავლე თემის ფარგლებში უნდა დაეუფლოს. შეფასების ინდიკატორებზე დაყრდნობით ყალიბდება კრიტერიუმები შეფასების რუბრიკებისთვის.

VIII კლასი

თემა: რიცხვები და მათი გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში და მეცნიერების სხვა დარგებში		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**
რიცხვები	რაციონალური რიცხვის მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი. ირაციონალური რიცხვი. არითმეტიკული ფესვი რიცხვიდან, კუბური ფესვი რიცხვიდან	8.1.1 მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი. ნამრავლის, ფარდობის და ხარისხის აყვანა ხარისხში. ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი და შეფარდება; 8.1.2 რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმა და მისი კავშირი პოზიციურ სისტემასთან; 8.1.3 არითმეტიკული ფესვი რიცხვიდან; კუბური ფესვი რიცხვიდან. რიცხვებისა და რიცხვითი გამოსახულებების (მათ შორის ხარისხების ან არითმეტიკული ფესვების შემცველი გამოსახულებების) შედარება; 8.1.4 "სამომხმარებლო არითმეტიკა": მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი; სხვადასხვაგვარი ფასდაკლება; მარტივი ხარჯთაღრიცხვა.
შეკითხვები: • როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რიცხვების თვისებები ორი სამომხმარებლო კონტრაქტიდან ან მომსახურების გეგმიდან უკეთესის შესარჩევად? • როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რიცხვების თვისებები ბუნებისმეტყველების დარგებიდან მომდინარე გამოთვლებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას?		
შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს: • პოზიციური სისტემის და რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმის გამოყენება **(მათ.საზ.4,5);** • რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მათი შედეგის შეფასება **(მათ.საზ.1,2,3,4,5);** • მსჯელობა-დასაბუთების ზოგიერთი ხერხის გამოყენება **(მათ.საზ.1,2,3);** • გამოთვლებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა **(მათ.საზ.7,8,9).**		

თემა: რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელები		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება	სიდიდეთა შორის წრფივი დამოკიდებულება	8.2.1 წრფივი დამოკიდებულება და მისი გამოსახვა გრაფიკის, ცხრილის და განტოლების საშუალებით.
ალგებრული გამოსახულებები; განტოლებები და უტოლობები	ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა; ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობა	8.2.2 ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემები და მათი გამოყენება ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას. განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამონახსნისა და ამონახსნთა სიმრავლის ცნებები. ტოლფასი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები; 8.2.3 ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სიტემის შედგენა ამოცანის პირობის მიხედვით; 8.2.4 ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობები; 8.2.5 ამოცანების ამოხსნა უტოლობის გამოყენებით.

შეკითხვები:

- შეგიძლიათ თუ არა დაასახელოთ ნაცნობ სიდიდეთაგან ისეთები, რომელთა შორისაც წრფივი დამოკიდებულებაა?
- რომელი მათგანი მეუბნება უფრო მეტს ჩემს მიერ შესასწავლ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულებაზე - ცხრილი, ნახაზი თუ ფორმულა?
- როგორ უნდა შევადგინოთ და ამოვხსნათ ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობები ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას და რეალური ვითარების მოდელირებისას?
- რითი განსხვავდება განტოლებისა და უტოლობის ამონახსნები?
- როგორ უნდა ამოვიცნოთ, გავაანალიზოთ და გამოვსახოთ წრფივი დამოკიდებულება ყოველდღიური ცხოვრებიდან ნაცნობი სიდიდეების დამოკიდებულებებს შორის?

შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ვერბალურად აღწერილი სიტუაციის ალგებრული გამოსახულების (ფორმულის) სახით ჩაწერა **(მათ.საბ.4,5,6,7,8,9);**
- ალგებრული გამოსახულების გამარტივება და მათი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა ცვლადთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის **(მათ.საბ.4,5);**
- განტოლების ამოხსნა და ამონახსნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია **(მათ.საბ.2,3,4,5);**
- განტოლებების შედგენა ვერბალურად მოცემული ამოცანის შესაბამისად, განტოლების შესაბამისი ამოცანის შედგენა **(მათ.საბ.3,4,7,8,9);**
- სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულების ამოცნობა, გაანალიზება და გამოსახვა **(მათ.საბ.3,4,5);**
- ორ სიმრავლეს შორის შესაბამისობის აგება, გამოსახვა და გამოკვლევა **(მათ.საბ.3,4,7,8,9).**

თემა: გარემომცველი სამყარო და გეომეტრიული ობიექტები		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**

ლოგიკური მსჯელობა, არგუმენტირება	აქსიომა, თეორემა.	
გეომეტრიული ფიგურა	კუთხე, სამკუთხედი, ოთხკუთხედი, ბრტყელი ფიგურის ფართობი, სივრცული ფიგურის მოცულობა	8.3.1 წრფეთა მართობულობა; 8.3.2 ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების თვისებები; 8.3.3 თალესის თეორემა; 8.3.4 სამკუთხედის შიდა კუთხეების ჯამი. სამკუთხედის მედიანა, ბისექტრისა, სიმაღლე და მათი თვისებები. სამკუთხედის შუახაზი და მისი თვისება. ტოლფერდა/ტოლგვერდა სამკუთხედის თვისებები. 8.3.5 პარალელოგრამი. პარალელოგრამის თვისებები. მართკუთხედი. მართკუთხედის თვისებები. რომბი. რომბის თვისებები; 8.3.6 ტრაპეციის ელემენტები: ფუძე, ფერდი, სიმაღლე, შუახაზი. ტრაპეციის კერძო სახეები: ტოლფერდა ტრაპეცია, მართკუთხა ტრაპეცია და მათი თვისებები; 8.3.7 მართკუთხედის, პარალელოგრამის, ტრაპეციის ფართობი, მართი პრიზმისა და წესიერი პირამიდის ზედაპირის ფართობი; 8.3.8 მოცულობა, მოცულობის თვისება: სხეულის მოცულობა ამ სხეულის შემადგენელი ნაწილების მოცულობების ჯამის ტოლია; 8.3.9 პითაგორას თეორემა; 8.3.10 მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი. მართკუთხა სამკუთხედების ამოხსნა.
კოორდინატები და გეომეტრიული გარდაქმნები	წერტილის კოორდინატები სიბრტყეზე, მობრუნება	8.3.11 კოორდინატთა სისტემა: სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსახვა კოორდინატებში, კოორდინატების გამოყენება ფიგურათა თვისებების კვლევაში; 8.3.12 გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე: მობრუნება.

შეკითხვები:

- როგორ შეგვიძლია ერთი ფიგურის გამოყენება მეორის ფართობის დასადგენად?
- როგორ გავზომოთ ფიგურის ფართობი ამ ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გარეშე?
- როგორ უნდა გამოვიყენოთ ალგებრული გარდაქმნები, ტოლობისა და უტოლობების თვისებები გეომეტრიულ დებულებათა დასაბუთებისას?
- როგორ შეიძლება გეომეტრიული ფიგურების თვისებების გამოყენება ჩვენი გარემომცველი საგნების და მათი ელემენტების ზომების მოსაძებნად?

შეფასების ინდიკატორები - მოსწავლემ უნდა შეძლოს: • ფიგურათა თვისებების გამოყენება ფიგურათა კლასიფიცირებისათვის და მათი სახეობების შესადარებლად **(მათ.საბ.3,4,7,8,9);** • ფიგურისა და მისი ელემენტების ზომების მოძებნა **(მათ.საბ.1,2,5,6,7);** • გეომეტრიული დებულებების მართებულობის დასაბუთება **(მათ.საბ.1,2,3).**

თემა: მონაცემთა ინტერპრეტაცია და ანალიზი		
ზოგადი ცნებები	**ცნებები**	**საკითხები**
მონაცემები	კითხვარი, ანკეტა, ექსპერიმენტი, ფარდობითი სიხშირე, დიაგრამა	8.4.1 მონაცემთა შეგროვების საშუალებანი: კითხვარის/ანკეტის შედგენა და რესპონდენტთა გამოკითხვა (წარმომადგენლობითი ჯგუფის შერჩევის გარეშე); შემთხვევითი ექსპერიმენტი, შემთხვევითობის წარმომქმნელი მოწყობილობები - მონეტა, ურნა, კამათელი, რულეტი; 8.4.2 მონაცემთა მოწესრიგებული ერთობლიობების რაოდენობრივი და თვისებრივი ნიშნები: მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე, მონაცემთა წარმოდგენის საშუალებანი: წრიული დიაგრამა ფარდობითი სიხშირის დიაგრამა.
შეკითხვები: • რამდენად მნიშვნელოვანია დასკვნების მართებულობისთვის მონაცემების შეგროვების შესაფერისი საშუალებების გამოყენება? • რა განაპირობებს თვისებრივი და რაოდენობრივი მონაცემების წარმოდგენის ხერხის შერჩევას? • როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ რაოდენობრივ მონაცემთა ანალიზის შედეგები ყოველდღიურ ცხოვრებაში?		
შეფასების ინდიკატორები - <u>მოსწავლემ უნდა შეძლოს:</u> • ამოცანის ამოსახსნელად (პრობლემის გადასაჭრელად) საჭირო მონაცემების მოპოვება **(მათ.საბ.4,7,8,9);** • მონაცემების მოწესრიგება და წარმოდგენა დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით**(მათ.საბ.4,5,6).**		

შინაარსისა და მიზნების რუკა

შინაარსი	თემის კავშირი მიზნებთან და შედეგებთან	სავარაუდო ხანგრძლივობა
1	2	3
თავი 1 გამონათქვამი. ხარისხი მთელი მაჩვენებლით 1. გამონათქვამი 2. მოცემულის საწინააღმდეგო გამონათქვამი 3. მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები, დიაგრამა 4. ჰისტოგრამა 5. ალბათობა და ფარდობითი სიხშირე	8.4.1 8.4.2	15 სთ
საკონტროლო წერა # 1		1 სთ
თავი 2 წრფეთა პარალელობა. ტოლფერდა სამკუთხედი. 1. წრფეთა მართობულობა, პარალელობა 2. წრფეთა პარალელობის ნიშნები 3. პარალელურ წრფეთა თვისებები 4. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 5. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები 6. სამკუთხედის ტოლფერდობის ნიშნები 7. სამკუთხედის გარე კუთხე 8. ტოლგვერდა სამკუთხედი 9. სამკუთხედის უტოლობა 10. წერტილიდან წრფემდე მანძილი 11. მართკუთხა სამკუთხედი 12. მობრუნება, ცენტრალური სიმეტრია	8.3.1 8.3.2 8.3.4 8.3.12	20 სთ
საკონტროლო წერა # 2		1 სთ
თავი 3 ალგებრული წილადი. უტოლობა. 1. ხარისხი მთელი მაჩვენებლით 2. მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები 3. წილადური გამოსახულება 4. წილადების შეკრება და გამოკლება 5. წილადების გამრავლება და გაყოფა 6. წილადური გამოსახულებების გამარტივება 7. წილადური განტოლება 8. წარმოვადგინოთ წილადი წილადების ჯამის სახით 9. უტოლობა 10. რიცხვითი უტოლობების თვისებები 11. ამოვხსნათ მოდულის შემცველი უტოლობა	8.1.1 8.2.4 8.2.5	24 სთ
საკონტროლო წერა # 3; 4		2 სთ
თავი 4 ფართობი. კვადრატული ფესვები 1. ფართობის თვისებები. კვადრატის ფართობი 2. მართკუთხედის, მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი 3. რაციონალური რიცხვები 4. კვადრატული ფესვი 5. კვადრატული ფესვების გამრავლება და გაყოფა 6. კვადრატული ფესვი ხარისხიდან 7. კვადრატული ფესვების შემცველი გამოსახულებების გარდაქმნა 8. პითაგორას თეორემა 9. ორმაგი რადიკალების გარდაქმნა 10. საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული 11. საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის დამოკიდებ-ულების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას 12. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა 13. სივრცული ფიგურების შლილები	8.3.8 8.3.9 8.3.11 8.1.2 8.1.3	25 სთ
საკონტროლო წერა # 5		1 სთ

თავი 5 წრფივი ფუნქცია. ორუცნობიანი ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა 1. ფუნქციის ცნება 2. ფუნქციის მოცემის ხერხები 3. ფუნქციის გრაფიკი 4. წრფივი ფუნქცია 5. წრფივი განტოლებისა და უტოლობის გრაფიკული ამოხსნა 6. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება 7. ამოვხსნათ განტოლება მთელ რიცხვებში 8. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა 9. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით 10. ალგებრული შეკრების ხერხი 11. განტოლების ამოხსნა მთელ რიცხვებში	8.1.4 8.2.1 8.2.2 8.2.3	40 სთ
საკონტროლო წერა # 6; 7		2 სთ
თავი 6 ოთხკუთხედები 1. მრავალკუთხედები 2. პარალელოგრამი. პარალელოგრამის თვისებები 3. სამკუთხედების აგება 3. პარალელოგრამის ნიშნები 4. პარალელოგრამის ფართობი 5. სამკუთხედის ფართობი 6. სამკუთხედის შუახაზი 7. რომბი, რომბის თვისებები 8. რომბის ნიშნები. რომბის ფართობი 9. მართკუთხედი. კვადრატი 10. ტრაპეცია. ტრაპეციის შუახაზი 11. მართკუთხა ტრაპეცია. ტოლფერდა ტრაპეცია 12. ტრაპეციის ფართობი 13. მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები 14. სიმეტრია გვეხმარება ამოცანების ამოხსნაში	8.3.5 8.3.6 8.3.7	25 სთ
საკონტროლო წერა # 8; 9		2 სთ
თავი 7 სამკუთხედის მედიანების და ბისექტრისების თვისებები. თალესის თეორემა. 1. თალესის თეორემა 2. თალესის თეორემის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას 3. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება 4. სამკუთხედის მედიანების თვისება 5. მედიანების თვისების გამოყენება აგების ამოცანებში 6. მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი 7. მართკუთხა სამკუთხედი	8.3.9 8.3.10 8.3.3	14 სთ
საკონტროლო წერა # 10		1 სთ
სარეზერვო დრო		7 სთ

გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს

II თავი. § 4. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი

მოსწავლეები აღმოაჩენენ სამკუთხედის თვისებას (სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის შესახებ) მოდელებზე მანიპულაციების საშუალებით, ასაბუთებენ დებულებებს ამ თვისების შესახებ სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით. მსჯელობენ დასაბუთების ხერხების სარწმუნოობის შესახებ.

აქტივობის მიზანი:

- მოსწავლე გაიწაფოს ამოცანის კონტექსტის შესაბამისად გეომეტრიულ ობიექტთა გამოსახვაში;
- ჩამოუყალიბდეს კრიტიკული აზროვნება, მსჯელობისა და დასაბუთების უნარი.

ძირითადი შეკითხვები:

1. შეიძლება თუ არა ფიგურის თვისების აღმოჩენა მისი მოდელის გამოყენებით?
2. შესაძლებელია თუ არა საზომი ხელსაწყოების გამოყენებით ფიგურის თვისების შესახებ ვარაუდის გამოთქმა?
3. დებულების სამართლიანობის დადგენის რომელი ხერხი მიგაჩნიათ უფრო სარწმუნოდ – ზემოთ ჩამოთვლილი თუ დასაბუთების გზით მიღებული?

სავარაუდო დრო: 1 გაკვეთილი.

მასალა: დიდი ზომის ქაღალდი (ფორმატი), ფერადი ფურცლები, სახაზავი, ტრანსპორტირი, ფანქარი წებო, ...

აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით (5 წუთი).
2. მასწავლებელი სთხოვს მოსწავლეებს გაიხსენონ შესწავლილი მასალა კუთხეების შესახებ: განსაზღვრება, კლასიფიკაცია, თვისებები, კუთხეთა ჯამი და მისი თვისებები და ა.შ. (5 წუთი).
3. შემდეგ კლასს დაყოფს ოთხ ჯგუფად. ორი ჯგუფის დავალებაა სხვადასხვა სახეობის სამკუთხედების მოდელების გამოყენებით (მაგ. ერთმანეთზე მიდგმით) გამოთქვას ვარაუდი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის შესახებ და მოახდინოს თავისი ვარაუდის სამართლიანობის დემონსტრირება.
4. დანარჩენ ორ ჯგუფს ვყოფთ წყვილებად, თითოეულ წყვილს ეძლევა დავალება გამოიყენოს ტრანსპორტირი, გაზომოს და აღრიცხოს სხვადასხვა სახეობის სამკუთხედების კუთხეები და ამის საფუძველზე გამოთქვას ვარაუდი სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის თაობაზე (სხვადასხვა ჯგუფს გამოსაკვლევად შეიძლება მიეცეთ სხვადასხვა სახეობის სამკუთხედი) (10 წუთი).
5. ოთხივე ჯგუფი ახდენს თავისი ნამუშევრის პრეზენტაციას (10 წუთი).
6. ამით შემდეგ მასწავლებლის დახმარებით მოსწავლეები კუთხეების შესახებ მათთვის ცნობილ დებულებებზე დაყრდნობით ამტკიცებენ დებულებას (10 წუთი).
7. შემდეგ იმართება დისკუსია, თუ რომელი ხერხია იოლი და რომელი – სარწმუნო (5 წუთი).
8. მასწავლებელი საშინაო დავალებად აძლევს მოსწავლეებს დაადგინონ სამკუთხედის კუთხეებთან დაკავშირებული რომელიმე დებულება (მაგ. გარე კუთხის თვისება).

IV თავი. § 6. პითაგორას თეორემა

მოსწავლეები დამოუკიდებლად, ნახაზისა და პარაგრაფში დასმული შეკითხვების დახმარებით ამტკიცებენ პითაგორას თეორემას, ეცნობიან ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას.

აქტივობის მიზანი:

მოსწავლემ შეძლოს ნახაზზე მოცემული პირობის გააზრება და შესაბამისი დასკვნის გამოტანა. მოსწავლემ შეძლოს შეფასება, დამტკიცდა მოცემული ფაქტი, თუ საჭიროა კიდევ რაიმეს დადგენა–დასაბუთება, წინააღმდეგ შემთხვევაში შეძლოს იმ პირობის გავრცობა ისე, რომ დაამტკიცოს ესა თუ ის ფაქტი.
მოსწავლეებს ჩამოუყალიბდეთ კრიტიკული აზროვნებისა და მსჯელობის უნარი.
სავარაუდო ხანგრძლივობა: 1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რის შემდეგაც მოსწავლეებს ვახსენებთ ფართობის თვისებებს, კვადრატის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას (10 წთ).
2. შემდგომ მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს იფიქრონ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ 1–4 დავალებებზე (5–7 წთ).
3. წყვილები ან ჯგუფები წარადგენენ შესრულებულ დავალებას და აყალიბებენ პითაგორას თეორემას (5 წთ).
4. პარაგრაფში მოცემული ინდივიდუალური შეკითხვები მოსწავლეებს ეხმარება უფრო ღრმად გაიაზრონ „დამტკიცების“ არსი, დაადგინონ, რომ პითაგორას თეორემა დამტკიცებულია (5 წთ).
5. მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს გაიაზრონ პარაგრაფში განხილული ამოცანა. სანამ მოსწავლეები ფიქრობენ, მასწავლებელი დაფაზე ხაზავს ამ ამოცანის შესაბამის ნახაზს (5 წთ).
6. რომელიმე მოსწავლე მასწავლებლის დახმარებით ახდენს ამოხსნილი ამოცანის პრეზენტაციას (5 წთ).
7. რომელიმე ამოცანის მაგალითზე მასწავლებელი აჩვენებს ბავშვებს, როგორ უნდა გამოიყენონ პითაგორას თეორემა (5 წთ).

IV თავი. §12. საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის დამოკიდებულების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის დამოკიდებულებას და იყენებენ მას უტოლობათა დამტკიცების დროს.
აქტივობის მიზანი:
• გაეცნონ საშუალო გეომეტრიულის ცნებას;
• გაეცნონ საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის დამოკიდებულე-ბას;
• მიღებული ცოდნა გამოიყენონ უტოლობების და გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას.
სავარაუდო ხანგრძლივობა 1 გაკვეთილი.

აქტივობის აღწერა:
მოსწავლეებს ვახსენებთ რამდენიმე რიცხვის საშუალოს (საშუალო არითმეტიკულის) ცნებას. დავსვათ რამდენიმე შეკითხვა. მაგ. 1) როგორ გამოყავთ თქვენი სემესტრული ნიშანი? 2) როგორ ვიანგარიშო თქვენი კლასის მოსწავლეთა საშუალო ასაკი? როგორ შეიცვლება ეს მაჩვენებელი, თუ ვიანგარიშებთ კლასის ყველა მოსწავლის და მასწავლებლის საშუალო ასაკს?
გავარჩიოთ შემდეგი ამოცანა: რის ტოლია მანქანის საშუალო სიჩქარე მთელ გზაზე, თუ ის - დან -სკენ მოძრაობს 40კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო უკან ბრუნდება 60კმ/სთ სიჩქარით?
სავარაუდოა, რომ კლასში იქნება შემდეგი პასუხი: (40+60):2=50(კმ/სთ).

კითხვები: რას უდრის საშუალო სიჩქარე? თუ AB მანძილს აღვნიშნავთ x-ით, რა მანძილი გაუვლია მანქანას? რის ტოლია მთელი დახარჯული დრო? – $\frac{x}{40}+\frac{x}{60}=\frac{x}{24}$ (სთ).
რას უდრის საშუალო სიჩქარე? $2x:\frac{x}{24}=48$ (კმ/სთ). (10 წთ)
ახლა უკვე შეიძლება განვმარტოთ საშუალო გეომეტრიული. თვალსაჩინოდ მოვიყვანოთ პარაგრაფის დასაწყისში დასმული ამოცანა – კვადრატის გვერდი მართკუთხედის გვერდების საშუალო გეომეტრიულია. კითხვები – შეგიძლიათ მოიყვანოთ საშუალო გეომეტრიულის მაგალითები გეომეტრიიდან? ალგებრიდან? რომელი რიცხვების საშუალო გეომეტრიულია 6 [$6^2=1\cdot36=2\cdot18=3\cdot12=4\cdot9=6\cdot6$]? $6=\sqrt{1\cdot36}$, $6=\sqrt{2\cdot18}$, $6=\sqrt{3\cdot12}$, $6=\sqrt{4\cdot9}$. განვიხილოთ მოცემული რიცხვების საშუალო არითმეტიკული $\frac{1+36}{2}>6$, $\frac{2+18}{2}>6$, $\frac{3+12}{2}>6$, $\frac{4+9}{2}>6$, $\frac{6+6}{2}>6$.

ყოველთვის სრულდება ეს დამოკიდებულება?

მივცეთ მოსწავლეებს დავალება განიხილონ სხვაობა – $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$, როცა a>0 და b>0 და გააკეთონ შესაბამისი დასკვნა. (15 წთ)
ყოველივე ამის შემდეგ შეიძლება ვაჩვენოთ მოსწავლეებს როგორ გამოიყენება დასაბუთებული დებულება უტოლობების დამტკიცების დროს. გარდა პარაგრაფში განხილული მაგალითებისა კლასში დავამტკიცოთ მე-4 სავარჯიშოს რამდენიმე მაგალითი. (10 წთ)
კითხვები აქტივობის გასამტკიცებლად

1) რვა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 54-ია, ხოლო ამ რვიდან რომელიღაც ხუთის კი 186. რას უდრის დანარჩენი სამის საშუალო არითმეტიკული?

2) დაასახელეთ ორი დადებითი რიცხვი, რომელთა საშუალო არითმეტიკული 3-ია, ხოლო საშუალო გეომეტრიული – 8.

3) დაწერეთ a–1 და a+1 რიცხვების საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული.

4) მდინარის დინების სიჩქარეა 2კმ/სთ, ნავის საკუთარი სიჩქარე – 14კმ/სთ. რა საშუალო სიჩქარით მოძრაობდა ნავი, თუ მან გაიარა ერთი და იგივე მანძილი მდინარის დინების მიმართულებით და საწინააღმდეგო მიმართულებით? (10 წთ)

V თავი. §5 წრფივი ფუნქცია. პირდაპირპროპორციულობის დამოკიდებულება

რეზიუმე:
• მოსწავლეები გაეცნობიან y=kx ფუნქციას
• დაადგენენ კავშირს წრფის დახრის კუთხისა და k კოეფიციენტს შორის.

აქტივობის მიზანი:
• მოსწავლეებმა შეძლონ $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
• ამოიცნონ პირდაპირპროპორციულობის გრაფიკი
• k კოეფიციენტის ნიშნის მიხედვით დაადგინონ, თუ რომელ საკოორდინატო მეოთხედებში მდებარეობს გრაფიკი.
• გრაფიკის მიხედვით დაადგინონ კ კოეფიციენტის ნიშანი;
• სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტისას შეძლონ მიღებული ცოდნის გამოყენება;
• ჩამოუყალიბდეთ კვლევითი უნარ-ჩვევები.

სავარაუდო ხანგრძლივობა: 1 გაკვეთილი
აქტივობის აღწერა:
1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით, რაც ხელს შეუწყობს უკვე შესწავლილი მასალის გამეორებას (5 წთ).
2. მასწავლებელი ავალებს წყვილებს იფიქრონ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანაზე (5 წთ).
3. წყვილები ახდენენ ამოხსნილი ამოცანების პრეზენტაციას (5 წთ).
4. მასწავლებელი ხსნის ახალ მასალას და კლასთან ერთად ადგენს წრფის მდებარეობასა (საკოორდინატო მეოთხედების მიმართ) და k კოეფიციენტის ნიშანს შორის დამოკიდებულებას. სასურველია დაისვას შეკითხვები: 1. თუ $k>0$, მაშინ შესაძლებელია თუ არა, რომ x და y იყოს ა) სხვადასხვანიშნიანი; ბ) ერთნაირნიშნიანი.
2. თუ $k<0$, მაშინ შესაძლებელია თუ არა, რომ x და y იყოს ა) სხვადასხვანიშნიანი; ბ) ერთნაირნიშნიანი (10 წთ).
5. წყვილები ფიქრობენ პარაგრაფში მითითებულ ამოცანებზე (5 წთ).
6. ამოცანების პრეზენტაციის პროცესში მასწავლებელი შეკითხვებით ეხმარება მოსწავლეებს ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობის k-ზე დამოკიდებულების დადგენაში. შემდეგ ავალებს დაასაბუთონ, რომ ა) თუ $k>0$, მაშინ $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს I და III მეოთხედებში. ბ) თუ $k<0$, მაშინ $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს II და IV მეოთხედებში. ყოველივე ამის შემდეგ ვაყალიბებთ $y=kx$ წრფის Ox სხივისადმი დახრის კუთხის k კოეფიციენტზე დამოკიდებულებას. (10 წთ).
7. მასწავლებელი აჯამებს ახალ მასალას და აძლევს კლასს დავალებას (5 წთ).

V თავი. §5 წრფის დახრა

აქტივობის მიზანი:
აზრის ჩამოყალიბების, კვლევითი უნარ–ჩვევების ურთიერთთანამშრომლობის, წინა ცოდნის მოცემულ საკითხთან დაკავშირებით უნარების ჩამოყალიბება და განვითარება.
წრფის წერტილთა კოორდინატების საინტერესო თვისების გაცნობა: x კოორდინატის ერთი და იმავე სიდიდით ზრდის (შემცირების) დროს y კოორდინატის შესაბამისი მნიშვნელობებიც ერთი და იმავე სიდიდით იცვლება.

აქტივობის აღწერა:
გაკვეთილს ვიწყებთ იმ კითხვების გაცემით, რომელიც პარაგრაფის დასაწყისშია მოცემული. მოსწავლეები გამოთქვამენ თავიანთ ვარაუდს. მსჯელობის შემდეგ მივლენ იმ დასკვნამდე, რომ რადგან ორივე მთის სიმაღლე ტოლია, ამიტომ რაც ნაკლებია AO, მით უფრო ციცაბოა მთა და ძნელია მასზე ასვლა. ამის შემდეგ დაფაზე ვკიდებთ წინასწარ მომზადებულ პლაკატს ბადეზე დახაზული განტოლების გრაფიკით და ვაჩვენებთ, რომ $A(0;1)$ ორი მიმდევრობითი პარალელური გადაადგილებით, 3 ერთეულით მარჯვნივ და 2 ერთეულით ზევით მივიღებთ $B(3;3)$ წერტილს, რომელიც ისევ წრფეზე მდებარეობს (5 წთ). მოსწავლეებს ვთხოვოთ

შეამოწმონ შესრულდება თუ არა იმავე წრფის სხვა წერტილებისთვისაც. ვურიგებთ წინასწარ გამზადებულ ცხრილს და ვთხოვთ მოცემული ნიმუშის მიხედვით შეავსონ იგი. როდესაც შეავსებენ ცხრილს, ამის შემდეგ ერთი ან რამდენიმე მოსწავლე ავსებს კედელზე გამოკრულ დიდი ზომის ცხრილს.
კითხვა: რა კანონზომიერების შემჩნევა შეიძლება მიღებული ცხრილით? მოსწავლეები მცირე კამათის შემდეგ შეთანხმდებიან, რომ x–ის ერთი და იმავე რიცხვით, კერძოდ 3–ით, ზრდის შედეგად y-ის შესაბამისი მნიშვნელობები მუდმივად 2–ით იზრდებოდა.
ამის შემდეგ შეგვიძლია განვიხილოთ სხვა განტოლება, მაგალითად, იგივე დავალების შესრულების შემდეგ ვსვამთ კითხვას: შეიმჩნევა თუ არა იგივე კანონზომიერება ამ შემთხვევაშიც. მცირეოდენი კამათის შემდეგ მოსწავლეები მივლენ იმ დასკვნამდე, რომ კანონზომიერება შენარჩუნდა, ოღონდ y–ის მნიშვნელობებით. ამ შემთხვევაში –1–ით მცირდებოდა.
ამის შემდეგ უკვე შესაძლებელია მიღებული შედეგი ანალიზურად განვამტკიცოთ ერთ–ერთი მოსწავლე დაფასთან განიხილავს სხვაობას, სადაც (x_0,y_0) და (x_1,y_1) $y=kx+b$ განტოლების ამონახსნებია, ე.ი. შესაბამისად გრაფიკის წერტილებიც და $x_1=x_0a$. გამარტივების შემდეგ მიიღებენ, რომ $y_1–y_0=ka$.
კითხვა: რაზეა დამოკიდებული ორდინატების შესაბამის მნიშვნელობებს შორის სხვაობა? მცირე კამათის შემდეგ დაასკვნიან, რომ სხვაობა მუდმივი a-ს შემთხვევაში მუდმივი სიდიდეა (20 წთ).
ყურადღება მივაქცევინოთ წრფის კიდევ ერთ საინტერესო თვისებაზე. რაზეა დამოკიდებული წრფის დახრა, Ox სხივის მიმართ. 15 წთ.
ბავშვებს ვაწყვილებთ და ვურიგებთ დახაზულ ბარათებს.
შეკითხვა: რაზეა დამოკიდებული წრფის დახრა Ox სხივთან (რაც იგივეა რა განსაზღვრავს წრფის მიერ Ox სხივთან შედგენილი კუთხის სიდიდეს)? თუ გაუჭირდებათ პასუხის გაცემა, შესაძლოა მივუთითოთ, რომ შეადგინონ თითოეული განტოლებისთვის ცხრილი ბიჯით 2 და დააკვირდნენ რამდენით იცვლება y–ის შესაბამისი მნიშვნელობები. მცირეოდენი დისკუსიის შემდეგ მივლენ დასკვნამდე, რომ კუთხის სიდიდეს x–ის კოეფიციენტი განსაზღვრავს, ე.ი. $y=kx+b$ წრფის დახრას განსაზღვრავს k კოეფიციენტი.
კითხვა: გრაფიკის აგების გარეშე როგორ გავარკვიოთ რომელი განტოლებების გრაფიკები იქნება ერთმანეთის პარალელური და რომელი კვეთს ერთმანეთს? იმედია, მოსწავლეები ადვილად გაართმევენ თავს დასმულ შეკითხვას და თუ არა, შევახსენოთ წრფეთა პარალელობის ნიშნები (15 წთ).

VI თავი. § 9. მართკუთხედი. კვადრატი პრაქტიკული მეცადინეობა

მოსწავლეები სისტემაში მოიყვანენ ამ თავში მიღებულ ცოდნას. დაინახავენ მათთვის უკვე ცნობილ ფიგურებს: პარალელოგრამს, მართკუთხედს, რომბს და კვადრატს, როგორც ერთ მთლიანს, ნახავენ რა აქვთ მათ საერთო და რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. ასევე ნახავენ, რომ მართკუთხედი და რომბი პარალელოგრამის კერძო შემთხვევებია, ხოლო კვადრატი კი ყველა დანარჩენის კერძო შემთხვევაა.
დაინახავენ ყოველივე ზემოთქმულს სქემატურად გამოსახულს.
აქტივობის მიზანი
მოსწავლემ უნდა შეძლოს ოთხკუთხედების თვისებების საფუძველზე მათი სახეობის შედარება და კლასიფიკაცია.
შეძლებენ ჩამოაყალიბონ ზოგადობა–კერძოობის მიმართება მათთვის ცნობილ ოთხკუთხედებს შორის.

შეძლებენ სქემატურად გამოსახონ ეს მიმართება.
შეძლებენ ჩამოაყალიბონ მართკუთხედის, რომბისა და კვადრატის ყველა ნიშანი.
მიღებული ცოდნა დაეხმარებათ კონკრეტული პრობლემის გადაჭრაში.
შეძლებენ ამოიცნონ ესა თუ ის ოთხკუთხედი და შემდეგ გამოიყენონ მისი თვისებები.
ჩამოუყალიბდებათ კრიტიკული აზროვნების დასაბუთების და მსჯელობის უნარი.
სავარაუდო დრო: 1 გაკვეთილი.

1. მასწავლებელი აწვდის მოსწავლეებს მათთვის უკვე ცნობილი ფიგურების, მართკუთხედისა და კვადრატის განმარტებას – როგორც პარალელოგრამის კერძო შემთხვევის. შემდეგ ყოველივე ამას წარმოუდგენს სქემატურად – წინასწარ გამზადებული პლაკატით (10 წთ).
2. ყოფს კლასს ჯგუფებად და სთხოვს შეასრულონ პარაგრაფში მოცემული 4 დავალება, განუმარტავს მათ, რომ ამოხსნილ ამოცანაში ჯგუფი იღებს 2 ქულას, ხოლო ყოველ ჩამოყალიბებულ ნიშანში (მართკუთხედის ან კვადრატის) – 1 ქულას. შეგახსენებთ, რომ ნიშანი ასე უნდა იწყებოდეს: „თუ ოთხკუთხედში.... და აძლევს მოსამზადებლად დროს (15 წთ).
3. ჯგუფები სათითაოდ ახდენენ მათ მიერ ამორჩეული ამოცანის ან ნიშნის პრეზენტაციას (15 წთ).
4. მასწავლებელი აჯამებს შედეგებს და აცნობებს ჯგუფებს (5 წთ).

ტესტები გამეორებისთვის:
პასუხები:

I ტესტი

1. ბ; **2**. ბ; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. გ; **6**. ბ; **7**. გ; **8**. ბ; **9**. ა; **10**. 30 **11**. 6.

II ტესტი

1. ა. კიტრი; ბ. $\frac{1}{12}$; გ. 75ტ. **2**. ა. 250; ბ. თოჯინები; გ. 50%. **3**. 70; **4**. 5; **5**. გ; **6**. გ; **7**. ა; **8**. გ.
7. 60; **8**. 70; **9**. 25%; **10**. **ა.** 7,5; **ბ.** 6; **11**. 48 და 72; **12**. 13; **13**. 5 დღეში; **14**. 1 კგ.

III ტესტი

1. ბ; **2**. დ; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. გ; **6**. ბ; **7**. ა; **8**. დ; **9**. ბ; **10**. გ; **11**. გ; **12**. დ; **13**. დ; **14**. ა.

IV ტესტი

1. ბ; **2**. დ; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. გ; **6**. ა; **7**. გ; **8**. ბ; **9**. დ; **10**. 50; **11**. ბ.

V ტესტი

1. ა; **2**. ა; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. ა; **6**. დ; **7**. დ; **8**. ა; **9**. გ; **10**. ა.

VI ტესტი

1. ბ; **2**. გ; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. გ; **6**. ბ; **7**. ბ; **8**. ბ;

9. $94 \cdot (11+94)=94 \cdot 85=94 \cdot 5 \cdot 17 \vdots 17$.

10. $\frac{1}{15}(3x+5)=\frac{2+3x}{9} \quad \frac{3x+5}{5}=\frac{3x+2}{3} \Rightarrow x=\frac{5}{6}$

11. $\frac{2(3x-1)}{5}=\frac{8+x-2}{2} \Rightarrow \frac{2(3x-1)}{5}=\frac{6+x}{2} \Rightarrow x=\frac{37}{7}$

VII ტესტი

1. ბ; **2**. გ; **3**. გ; **4**. ბ; **5**. ა; **6**. ბ; **7**. გ; **8**. ა; **9**. ა.

VIII ტესტი

1. ბ; **2**. დ; **3**. დ; **4**. გ; **5**. გ; **6**. ბ; **7**. დ;

8. $y^8-y^4+4y^2-4=y^4(y^2-1)+4(y^2-1)=(y^2-1)(y^4+4)=(y-1)(y+1)(y^4+4)$;

9. $(a-b)^2=a^2+b^2+2ab=37-12=25 \Rightarrow a-b=5$;

10. $a+\frac{1}{a}=3 \Rightarrow a^2+2\cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}}+\frac{1}{a^2}=9 \Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=7$; **11.** დ.

მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, სტატისტიკა, ალბათობა.

კლასი: 8

საათების სავარაუდო რაოდენობა – 10-12

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე

თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• პროცესები შესაძლებელია დავახასიათოთ რიცხვითი მონაცემებით.
• რიცხვითი მონაცემების მახასიათებელია სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე, მედიანა, მოდა, საშუალო.
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.

თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე

<table>
<tr><th>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</th><th>საკითხი და ქვეცნებები</th><th>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</th><th>კომპლექსური დავალებები</th></tr>
<tr><td rowspan="3">• რიცხვითი მონაცემების მახასიათებელია მონაცემთა საშუალო არითმეტიკული, მედიანა, მოდა სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;</td><td>• რაოდენობრივი მონაცემები;
• სიხშირე;
• ფარდობითი სიხშირე;
• ალბათობა.</td><td>1. როგორი სხვადასხვა გზებით შეიძლება მონაცემთა თანაფარდობის წარმოდგენა
2. რითი განსხვავდება სიხშირე ფარდობითი სიხშირისაგან?
3. რომელი მონაცემი გვაძლევს მეტ ინფორმაციას, სიხშირე თუ ფარდობითი სიხშირე?
4. რას ნიშნავს ეკვივალენტური ფორმები?
5. რამდენი სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმითაა შესაძლებელი მონაცემთა წარმოდგენა?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში მოიძებნება მოვლენები, რომლებიც შესაძლებელია დავახასიათოთ რიცხვითი მონაცემებით.
შესაბამისად ეს მონაცემები ახასიათებენ აღნიშნულ მოვლენას.

კომპლექსური დავალება
ყუთში მოთავსებულია სხვადასხვა ფერის 1000 ბურთულა. ვიცით, რომ წითელი ბურთულების რაოდენობის ფარდობითი სიხშირეა 27/100.
დაადგინეთ:
ა) რამდენი წითელი ბურთულაა ყუთში?
ბ) რის ტოლია დანარჩენი ბურთულების რაოდენობის ფარდობითი სიხშირე?</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს განმარტონ, რით განსხვავდება სიხშირე ფარდობითი სიხშირისაგან.
საკვანძო შეკითხვა:
ა) შეგვიძლია თუ არა ვიპოვოთ მონაცემთა რაოდენობა, თუ ვიცით მისი სიხშირე?
ბ) შეგვიძლია თუ არა ვიპოვოთ მონაცემთა რაოდენობა, თუ ვიცით მისი ფარდობითი სიხშირე?</td></tr>
</table>

ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა; • კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით; **მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა;** • მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცე-სები შეიძლება ჩაიწეროს დიაგრამის, მონაცე-მების, ჰისტოგრამის, პიქტოგრამის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.	**ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **აქტივობა 1.** მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალი-ზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს ავალებს მონაცემებისათვის 2; 2; 2; 3; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7 იპოვონ: • 2-ის სიხშირე; • 7-ის სიხშირე; • 2-ის ფარდობითი სიხშირე; • 3-ის ფარდობითი სიხშირე; • დაამატეთ რამოდენიმე ისეთი მონაცემი, რომ 2-ის ფარდობითი სიხშირე გახდეს 4/15.	გ) როგორ შეიცვლება წითელ ბურთულათა ფარდობითი სიხშირე, თუ ყუთიდან ამოვი-ღებთ 1 წითელ ბურთულას? დ) როგორ შეიცვლება დანარჩენ ბურთუ-ლათა ფარდობითი სიხშირე, თუ ყუთიდან ამოვიღებთ 1 წითელ ბურთულას? ე) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთი-დან ბრმად ამოღებული ბურთულა იქნება წითელი. ვ) იპოვეთ ლურჯი ბურთულების რაოდენო-ბა, თუ მისი ფარდობითი სიხშირეა 19/100. ე) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ბრმად ამოღებული ბურთულა არ იქნება წითელი. იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, გან-ტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავა-ლებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **აქტივობა 1:** მასწავლებელი მოსწავლეებს ავალებს იმუშაოს კომპლექსურ დავა-ლებაზე. მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ და იმსჯელონ: • რის ტოლი გახდება 3-ის სიხშირე თუ მონაცემებს დაემატება ერთი 3-ისაგან გან-სხვავებული მონაცემი? • რის ტოლი გახდება 3-ის ფარდობითი სიხშირე თუ მონაცემებს დაემატება ერთი 3-ის ტოლი მონაცემი? • რის ტოლია 3-ის სიხშირე? • რის ტოლია 3-ისგან განსხვავებული რიცხვების სიხშირე?	
	ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით. **საკვანძო შეკითხვა:** როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს? **აქტივობები:** მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლე-ბლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტა-ტორს უსვამს შეკითხვებს.	
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი თავი1	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება.

ამოხსნები და მითითებები

I თავი
1. გამონათქვამი

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს გაარკვიოს არის თუ არა მოცემული წინადადება გამონათქვამი. კავშირებით – „და“, „ან“ – შეერთებული რთული გამონათქვამი რა შემთხვევაშია ჭეშმარიტი ან რა შემთხვევაში მცდარი.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ე) და; ვ) არ არის გამონათქვამი; ზ) ჭეშმარიტი გამონათქვამია, რადგან ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. თ) მცდარი გამონათქვამია. ცარიელი სიმრავლის ქვესიმრავლე მხოლოდ ცარიელი სიმრავლეა. {0} კი ერთელემენტიანი სიმრავლეა ელემენტით 0.

3. ი) ჭეშმარიტი გამონათქვამია. კ) მცდარი გამონათქვამია, რადგან ნებისმიერი ორი მთელი რიცხვის ნამრავლი ისევ მთელი რიცხვია, მაგრამ შეფარდება შესაძლოა არ იყოს მთელი. მაგალითად, $(2:7)\notin Z$.

4. ა) $300=5\cdot 60$ პასუხი: 60. ბ) $300:7=42$ (6) პასუხი: 42. გ) 11-ის ჯერადი ერთნიშნა და ორნიშნა რიცხვების რაოდენობაა $99:11=9$. რადგან $999:11=90(9)$, ამიტომ 11-ის ჯერადი სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება $90–9=81$.

2. მოცემულის საწინააღმდეგო გამონათქვამი

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს მოცემული გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამის ჩამოყალიბება. განვიხილოთ პასუხებში დასმული პრობლემა-ამოცანა:
ა) თუ მოსწავლეს მასწავლებელი არც ხვალ გაიძახებს და არც ზეგ, არამედ გაიძახებს ორი დღის შემდეგ, მაშინ A და D ერთდროულად აღმოჩნდება მცდარი. მაგრამ თუ ხვალაც და ზეგაც მოსწავლეს გამოიძახებენ და ორივე დღეს იგი 10 ქულას მიიღებს, მაშინ A და D აღმოჩნდება ჭეშმარიტი.
ბ) თუ ხვალ მოსწავლე მიიღებს 7-ს, მაშინ A და C ერთდროულად აღმოჩნდება მცდარი.

2. დაწერეთ მოცემული გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამი.
1. ყველა მარტივი რიცხვი კენტია.
საწინააღმდეგო გამონათქვამია: არსებობს ისეთი მარტივი რიცხვი, რომელიც არ არის კენტი.

ამოხსნები, მითითებები:
1. ბ) არსებობს კენტი ნატურალური რიცხვი (ჭ); დ) $7<4$ (მ); ე) $3\geq 2$ (ჭ); ვ) არსებობს ერთი მაინც კენტი რიცხვი, რომელიც არ არის მარტივი, ან არსებობს ერთი მაინც შედგენილი კენტი რიცხვი (ჭ).

2. გ).

3. ა) არ არის ურთიერთსაწინააღმდეგო „3>2“-ის საწინააღმდეგოა „3≤2“; ბ) ურთიერთსაწინააღმდეგოა; გ) არ არის; დ) არა. საწინააღმდეგო იქნება „თაკო არაა დედისერთა“, ან კიდევ „თაკოს ჰყავს ან და ან ძმა“.

4. გ).

7. ა) 42=4·10+2. ე.ი. მე-11 სართულზე; ბ) 117=4·29+1. 29=14+14+1   117=4·14+4·14+14·1+1 ბინა N117 არის III სადარბაზოს მე-2 სართულზე.

8. 37037 .

I გზა:

$$\begin{array}{r} 37037 \\ \times\ 12 \\ \hline 74074 \\ 37037 \\ \hline 444444 \end{array}$$

პასუხი: 12.

II გზა:

$$\begin{array}{r|l} 44444...4 & 37037 \\ \cline{2-2} -37037 & 12 \\ \cline{1-1} -74074 & \\ 74074 & \end{array}$$

ვაგრძელებთ გაყოფას მანამ, სანამ არ დასრულდება პროცესი, ანუ ნაშთი უნდა იყოს 0.

9. n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4). ხუთ მომდევნო რიცხვში 2 მაინც ლუწია. ე.ი. ერთი იყოფა 2-ზე, მეორე კი 4-ზე. ამიტომ გაიყოფა 8-ზე. ერთი 3-ის, ერთი კი 5-ის ჯერადი იქნება. ე.ი. გაიყოფა 8·3·5=120-ზე.

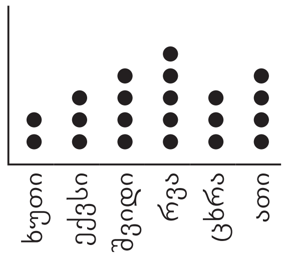
ტესტი: 1. გ. 2. გ. 3. დ. 4. გ. 5. ბ. 6. გ. 7. გ. 8. გ.

3. მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები, დიაგრამა

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა.

ქულა	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	2	3	4	5	3	4
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$



გ. სიხშირეთა ჯამია 21; ფარდობითი სიხშირეთა ჯამი 1.

დ. საშუალო ქულა: $\frac{2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7+5\cdot8+3\cdot9+4\cdot10}{21}\approx7{,}8.$

მოდაა - 8; მედიანაა 8; დიაპაზონი – 10–5=5.

2. შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი:

ტემპერატურა	28˚	30˚	32˚	33˚	34˚	35˚	36˚
სიხშირე	2	2	4	2	2	2	1

ა. მონაცემთა საშუალოა: $\frac{3\cdot28+2\cdot30+4\cdot32+2(33+34+35)+36}{15}=32\frac{4}{5}^{\circ}$

ბ. მოდაა 32˚;

გ. მედიანაა 32˚;

დ. დიაპაზონი:36˚-28˚=8˚

6. 2025 წ მოსახლეობა იქნება დაახლოებით 7,3 მილიარდი,
2030წ - დაახლოებით 8 მილიარდი,
2032წ - დაახლოებით 8,4 მილიარდი.

7. კვებაზე ხარჯავს დაახლოებით შემოსავლის მეოთხედს, $\frac{3000}{4}$=750 ლარს. ხოლო გადასახადებზე: $\frac{3000}{360\cdot130}^{\circ}$≈1080 ლარი (შესაბამისი კუთხე დაახლოებით 130°-ია).

8. ცხრილიდან ჩანს, რომ უკეთესი იქნება თუ შეიძენს XL, ვიწრო რომ არ გამოდგეს.

9. სავარაუდოა, რომ ადამიანები, რომლებიც შედიან თეატრში, შედარებით ხშირად დადიოდნენ სპექტაკლებზე. ამიტომ, რეალური სურათის მისაღებად უმჯობესია გამოკითხვა თეატრიდან დაშორებულ უბანში ჩატარდეს.

10. ფარდობით სიხშირეთა ჯამი, პროცენტებში, 100%-ია. ამიტომ, გამოტოვებული სიხშირე იქნება: 100-(3+6+12+20+27+11+3)=18(%)..

11. მონაცემთა რაოდენობაა: 3+5+15+11+7+4+8=53. მედიანა იქნება 27-ე მონაცემი (ვარიაციული მწკრივის). ასეთია 4.

13. ფართობთა ჯამია: 149 057კვ.კმ. შესაბამის ცენტრალურ კუთხეთა გრადუსული ზომებია:

აფრიკა - $\frac{30319\cdot360}{149057}$≈73°

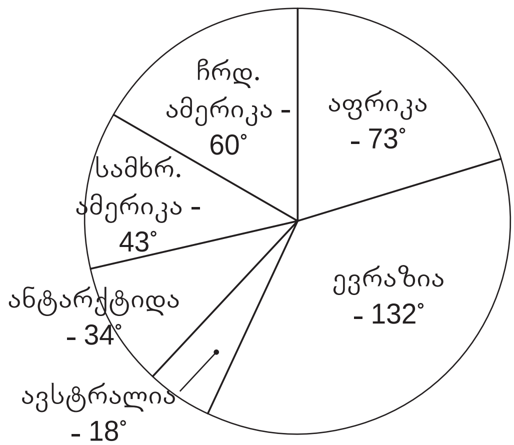
ევრაზია - $\frac{54870\cdot360}{149057}$≈132°

ჩრდ. ამერიკა - $\frac{24247\cdot360}{149057}$≈60°

სამხრ. ამერიკა - $\frac{17834\cdot360}{149057}$≈43°

ანტარქტიდა - $\frac{14100\cdot360}{149057}$≈34°

ავსტრალია - $\frac{7687\cdot360}{149057}$≈18°



14. შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი.

მონაცემი	1	2	3	4	5	7
სიხშირე	4	2	3	2	2	1

მონაცემთა საშუალო ტოლია: $\frac{4+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot2+7}{14}=\frac{42}{14}=3$

პირველ ოთხ დღეში მოწნავდა: 3+3+4+5=15 კალათას
ბოლო ოთხ დღეში - 1+1+1+3=6 კალათას

17. შევადგინოთ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

მონაცემი	1	2	3	4	5	6
სიხშირე	71	59	63	60	77	70
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{71}{400}$	$\frac{59}{400}$	$\frac{63}{400}$	$\frac{60}{400}$	$\frac{77}{400}$	$\frac{70}{400}$

4. ჰისტოგრამა

ამოხსნები, მითითებები:

8. $\frac{5}{60}+\frac{7}{60}+\frac{11}{60}+\frac{x}{60}+\frac{7}{60}+\frac{8}{60}+\frac{1}{60}=1$

$\frac{39+x}{60}=1$

x=21. $\frac{21}{60}$

9. საშუალო$=\frac{8\cdot0+1\cdot5+12\cdot2+3\cdot11+4\cdot14}{8+5+12+11+14}=\frac{118}{50}=2,36$

მოდა იქნება – 4.
მედიანა – (11+12):2=11,5

5. ალბათობა და ფარდობითი სიხშირე

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი ხდომილობის ამოცნობა. ამოიცნოს მოცემულის საწინააღმდეგო ხდომილობა, რომ A და $\overline{A}$ ხდომილობები ერთდროულად არ შეიძლება განხორციელდეს ან არ განხორციელდეს. მაგალითად, A=„კამათლის გაგორებისას 2-იანის მოსვლა“ და B=„4-ის მოსვლა“. ხდომილობები არ არის ერთმანეთის საწინააღმდეგო ხდომილობები, რადგან თუ გაგორდა 3-იანი, ეს ნიშნავს, რომ არც ერთი არ განხორციელდა. A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა იქნება C= „1-ის, 3-ის, 4-ის, 5-ის ან 6-ის მოსვლა“. მოსწავლეებმა უნდა დაინახონ ხდომილობის ალბათობასა და ფარდობით სიხშირეს შორის კავშირი.

ცდა 1. უფრო სწორი იქნება სალომეს ვარაუდი. მე-2 და მე-5 გვერდები ტოლია, ამიტომ მათი მოსვლის შანსი იქნება ერთნაირი, ასევე გვერდი 4-ის და 3-ის მოსვლაც ერთნაირად მოსალოდნელია, თუმცა რადგან გვერდი 2-ის ფართობი მეტია გვ. 3-ის ფართობზე, ამიტომ გვერდი 2-ის მოსვლას უფრო მეტი შანსი აქვს.

ცდა 2: 4 მონეტის აღებისას შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეზე დაყრდნობით, შეგიძლიათ მოსწავლეებს დაანახოთ, რომ საფასური 0-ჯერ მოსვლის შანსია ერთი თექვსმეტიდან 1-ელ, რაც იგივეა 3-ჯერ მოსვლის შანსია ოთხი თექვსმეტიდან, ხოლო ორჯერ მოსვლას ხელს უწყობს 6 ელ. ხდომილობა თექვსმეტიდან.ე.ი უფრო სწორია საბას მოსაზრება.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ლეგოს ოთხქვიანი ფიგურის გვერდები: 2, 3, 5, 4 ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ მათი მოსვლის შანსიც ტოლი იქნება. ე.ი I მოსაზრება ეკუთვნის ოთხქვიან ფიგურას.
II მოსაზრება იქნება 8-ქვიანი, ხოლო III – 6 ქვიანისთვის.

4.
ა. $\overline{A}_1$ - ისარი გაჩერდება ლუწ ნომერზე.
ბ. $\overline{A}_2$ - ისარი არ გაჩერდება მწვანე ფერზე
გ. $\overline{A}_4$ - ისარი არ გაჩერდება ყვითელ ფერზე
დ. უფრო მოსალოდნელია ისარი გაჩერდეს მწვანეზე, ვიდრე ყვითელზე.
თანაბრად მოსალოდნელია: 1. ისარი გაჩერდება კენტ ნომერზე და ისარი გაჩერდება ლუწ ნომერზე. 2. ისარი გაჩერდება მწვანე ფერზე და ისარი გაჩერდება ყვითელ ან ცისფერ ფერზე.

5. ელემენტარული ხდომილობებია: მოვიდა: გულის 6, აგურის 6, ჯვრის 6, ყვავი 6, ..., გულის ტუზი, აგურის ტუზი, ჯვრის ტუზი, ყვავის ტუზი, სულ 36. ცდის განხორციელება ხელს უწყობს ოთხი ელ. ხდომილობა: მოვიდა გულის ტუზი, აგურის ტუზი, ჯვრის ტუზი, ყვავის ტუზი. მე-2 ცდის განხორციელებას ხელს უწყობს: ამოღებული მონეტა: 1 თეთრიანი, 5 თეთრიანი, 10 თეთრიანი.

6. ორივე მარჯვენაა, ორივე მარცხენაა, ერთი მარჯვენაა და ერთი მარცხენა.

7. ა. A={1;2;3;4;5;6}
ბ. 1. B={2;4;6} 2. {3;4;5;6}.

9. პირველად შესაძლოა ამოვიღოთ ცხრა ბარათიდან ნებისმიერი, რადგან ორნიშნა რიცხვი უნდა მივიღოთ 01 არ ვიღებთ, მეორედ დარჩენილი ცხრა ბარათიდან ნებისმიერი, ე.ი. გვექნება 81 ელ. ხდომილობა ბ. დავთვალოთ რამდენი ორნიშნა რიცხვის, ჩანაწერში შედის ციფრი „5". არ ვითვალისწინებთ, „55„-ს, რადგან მოცემული ცდით რიცხვში ციფრების განმეორება შეუძლებელია. მოცემული ცდით რიცხვში ციფრების განმეორება შეუძლებელია ათეულების თანრიგში „5" დგას 50, 51, ..., ~~55~~, 56, ..., 59 სულ ცხრა რიცხვია ერთეულების თანრიგში „5" დგას 15, 25, ~~...~~, 55, 65, ..., 95, სულ რვა რიცხვი ე.ი გვექნება 17 ელ. ხდომილობა, რომელიც ხელს უწყობს ცდის განხორციელებას.

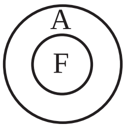
I	II	სულ
9	9	10•9=90

10.
სსს ბბბ
სსბ ბბს
სბს ბსბ
ბსს სბბ

11.
ა. $\overline{A}_1$ - ამოღებული კარტი არ არის წითელი;
ბ. $\overline{A}_4$ - ამოღებული კარტი ტუზი არ არის.
გ. 1. ამოღებულია აგურის კარტი, ამოღებულია ჯვრის კარტი. 2. ამოღებულია „6"-იანი, ამოღებულია „10"-იანი, ...

12. კუბი, წესიერი ტეტრაედრი

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. ა)  ჭ. ბ) მცდარია, რადგან $A \cap F = F$. გ) მცდარია, რადგან $\{0\} \cup \varnothing = \{0\}$

დ) ჭ; ე) მცდარია, რადგან არსებობს 999–99=900 სამნიშნა ნატურალური რიცხვი; ვ) ჭ; ზ) ჭ; $1^4=1$; $2^4=...6$; $3^4=...1$; $4^4=...6$; $5^4=...5$; $6^4=...6$; $7^4=...1$; $8^4=...6$; $9^2=..1$; $10^4=...0$; თ) ჭ; ი) ჭ; კ) მცდარია (ოქრომჭედლები იყვნენ XII ს.); ლ) ჭ — იმერეთშია.

2. ა) „მოცემულ განტოლებას ან არა აქვს ამონახსნი ან ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს“; გ) „მოცემული სამკუთხედი არ არის მახვილკუთხა“, ან კიდევ „მოცემული სამკუთხედი ან მართკუთხაა ან ბლაგვკუთხა“; დ) „სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი არ არის 270°“.

5. ა) $\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}}{2,25\cdot\frac{8}{9}} = \dfrac{1}{\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{9}} = \dfrac{1}{2}$; ბ) $\dfrac{20\cdot 0,02}{\frac{9}{11,5}} = \dfrac{0,4\cdot 115}{90} = \dfrac{2\cdot 23}{5\cdot 18} = \dfrac{23}{45}$;

გ) $2-\dfrac{\frac{10}{3}\cdot\frac{19}{10}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}} = 2-\dfrac{6\frac{1}{3}+4\frac{1}{3}}{\frac{50}{75}} = 2-\dfrac{31}{3}\cdot\dfrac{3}{2} = -13,5$.

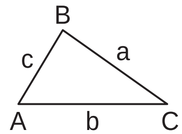
ტესტი თვითშემოწმებისთვის

1. ა; **2.** ბ; **3.** ა; **4.** გ; **5.** ბ; **6.** გ; **7.** დ; **8.** ბ; **9.** ბ; **10.** დ.

II თავი

<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: გეომეტრია</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 4-6</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სამკუთხედის უტოლობა</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილია ამ ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძეა.
• შესაძლებელია რი ან მეტი მონაკვეთ დავალაგოთ მათი სიგრძეების ზრდის ან კლების მიხედვით.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში;
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: სამკუთხედის უტოლობა.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნებები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">კავშირები – სიმრავლეების ელემენტებს შორის შესაბამისობა;
• ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს შესაბამისობა მიუხედავად ელემენტების ბუნებისა.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;</td><td>• მონაკვეთის სიგრძე;
• უტოლობა;
• მონაკვეთების შედარება;
• სამკუთხედის უტოლობა.</td><td>1. შესაძლებელია თუ არა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები გამოისახოს ნებისმიერი სამი რიცხვით?
2. რაში მდგომარეობს სამკუთხედის უტოლობა?
3. სრულდება თუ არა სამკუთხედის უტოლობა ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედებისათვის?
4. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ მოცემული სამი რიცხვით შესაძლებელია თუ არა გამოისახებოდეს სამკუთხედის გვერდები, საჭიროა თუ არა, რომ უტოლობები შევამოწმოთ სამივე გვერდისათვის?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში, არსებობს კანონზომიერებები, რომელიც შესაძლებელია გეომეტრიულად გამოვსახოთ.

კომპლექსური დავალება
მოცემული სამკუთხედისათვის ჩაწერილია სამკუთხედის უტოლობა. დაადგინეთ, იმისათვის, რომ შევამოწმოთ, მოცემული სამი რიცხვით შესაძლებელია თუ არა გამოისახებოდეს სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, საჭიროა თუ არა უტოლობები შემოწმდეს სამკუთხედის სამივე გვერდისათვის?</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისათვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს ცალ-ცალკე წაუკითხონ უტოლობების მარჯვენა და მარცხენა მხარეები.
საკვანძო შეკითხვა: ა) შესაძლებელია თუ არა უტოლობის მარცხენა მხარე დამტკიცდეს მარჯვენა მხარის ჭეშმარიტების გათვალისწინებით?</td></tr>
</table>

ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა; • ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით. (რაც ხელს უწყობს დამოკიდებულების უკეთ გააზრებასა და ანალიზს). • კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით; • განტოლებაში (უტოლობაში) შესაბამისი ოპერაციების განხორციელების შედეგად მიიღება ტოლფასი განტოლება (უტოლობა).	**ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **აქტივობა 1.** მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს: • თუ პირველი ფაქტიდან გამომდინარეობს მეორე ფაქტი და ცნობილია, რომ პირველი სამართლიანია, საჭიროა თუ არა მეორე ფაქტის ჭეშმარიტების დასაბუთება? • ჭეშმარიტია თუ არა, რომ თუ x>y და n>0, მაშინ x+n>y? • საჭიროა თუ არა სამკუთხედის უტოლობაში მარცხენა მხარეების ჭეშმარიტების დადგენა? • საჭიროა თუ არა სამკუხედის უტოლობის შემოწმება მცირე და საშუალო სიგრძის გვერდებისათვის? **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს დაასაბუთონ; იმისათვის, რომ შევამოწმოთ მოცემული სამი რიცხვით შეილება თუ არა გამოისახებოდეს სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, საკმარისია შევამოწმოთ უდიდესი გვერდისათვის უტოლობის მარჯვენა მხარე.	მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება; ნაშრომის პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ: წარმოადგინეთ კავშირები მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. $b-c<a<b+c$ $b-a<c<b+a$ $a-c<b<a+c$  იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f
მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა; • მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის. • ფუნქციების ცვლილება შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შესაბამისი გრაფიკული გარდაქმნებით;	**ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით. **საკვანძო შეკითხვა:** როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს? **აქტივობები:** მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს. **კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)** **ეტაპი I.** მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.	კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი. თავი 2.	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება

1. წრფეთა მართობულობა, პარალელურობა

რეზიუმე:

მოსწავლეებმა უკვე იციან, თუ რას ეწოდება კუთხე ორ წრფეს შორის, წრფეთა პარალელობა, პარაგრაფი ემსახურება წინა წელს გავლილი მასალის გამეორებას, რათა ადვილად აითვისონ ახალი მასალა:

გაკვეთილი შეიძლება ჩატარდეს, როგორც ჯგუფური მეცადინეობა. მოსწავლეები გაეცნობიან პარაგრაფში მოყვანილ მასალას, რის შემდეგაც ამოხსნიან სავარჯიშოებს (35 წთ) დარჩენილი 10 წუთი საკმარისია, რათა განიხილონ ნამუშევარი, რითაც გამყარდება მიღებული ცოდნა და უნარ-ჩვევები.

ამოხსნები, მითითებები:

1. $\angle COB - \angle AOC = 30^\circ \Rightarrow \angle AOC = 75^\circ \Rightarrow \angle DOB = 15^\circ$

2. $\angle DON = (180^\circ - 110^\circ):2 = 35^\circ \Rightarrow \angle MOD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$
$\angle COM = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

3. $4\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow \angle DOB = 135^\circ$

4. $\beta = 5\alpha \Rightarrow 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
$\angle BOD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 120^\circ$

5. $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

7. $\angle FOD = 180^\circ - \angle FOD = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$

8. $\angle AOB = \angle COD \equiv \alpha = 30^\circ$
$\angle BOK = 90^\circ + \alpha = 120^\circ$

2. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ორი წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებულ კუთხეთა დასახელება. ამ კუთხეების მიხედვით წრფეთა პარალელურობის დადგენა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ორი წრფე პარალელური რომ იყოს, მათი მესამით გადაკვეთისას მიღებული რვა კუთხიდან ნებისმიერი ორი კუთხე ან ტოლი უნდა იყოს ან ჯამში გვაძლევდეს 180°-ს.
$AB \nparallel CD$.

3. $\angle CNM = \angle BMN$ (შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები)

4. 8 კუთხიდან ოთხი 37°-ია, დანარჩენი ოთხი — 143°.

5. კუთხეები აღვნიშნოთ: x და $x-100^\circ$. $x+x-100^\circ=180^\circ$, საიდანაც $x=140^\circ$. ეს კუთხეებია 140° და 40°.

7. ა) არა; ბ) არა, გააჩნია რომელ ოთხ კუთხეზეა საუბარი; გ) არა; დ) კი.

8. $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$ a=2x; b=5x. **9.** $\frac{60x}{100}+x=180°$ x=112,5° ეს კუთხეებია: 112°30′; 67°30′.

10. AB=5x ე.ი. AM:AB=2:5 **11.** 7x=70° 20°; 50°.

3. პარალელურ წრფეთა თვისებები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს პარალელურ წრფეთა თვისებების ჩამოყალიბება, მათი ერთმანეთთან დაკავშირება. პარალელურ წრფეთა აგება მართკუთხა სახაზავის საშუალებით. მოცემული კუთხის პარალელურგვერდებიანი კუთხის განსაზღვრა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. მიღებული 8 კუთხიდან ოთხი 78°-ია. დანარჩენი ოთხი — 102°.

2. შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, ე.ი. თითოეული 80°.

3. ამ სამი კუთხიდან ორი მოსაზღვრეა, ე.ი. მესამე 230°–180°=50°. 50°; 50°; 130°.

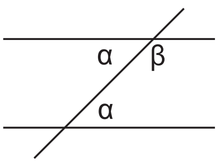
4. x; x–30°; x+x–30°=180°, საიდანაც x=150°. ეს კუთხეებია 105°; 75°.

5. ცხადია, ეს კუთხეები ტოლია, ამიტომ თითოეული 35°-ია.

6. $\alpha+(\alpha+40°)=180°\Rightarrow\alpha=70°$

$x=55°$

7.



$2\alpha=\frac{(\alpha+\beta)\cdot 30}{100}$; $\alpha+\beta=180°$

$\alpha=27°$

9. $A\cap B$ არის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე.

4. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ნებისმიერ სამკუთხედში ორი კუთხის მოცემულობით მესამე კუთხის პოვნა. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხის გამოსახვა მეორეთი. განსაზღვრა იმისა, თუ რამდენი ბლაგვი ან მართი კუთხე შეიძლება იყოს სამკუთხედში.

ამოხსნები, მითითებები:

1. არა, რადგან $100^\circ+90^\circ>180^\circ$

2. ერთი

3. ორივე იქნება მახვილი

4. ყურადღება გამახვილდეს ამოცანის პასუხზე, საჭიროა მიეთითოს მოსწავლეებს, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე გამოითვლება გამოსახულებით $\alpha=90°-\beta$, სადაც β მისი მეორე მახვილი კუთხეა.

5. მესამე კუთხეებიც იქნება ტოლი

6. არ შეიძლება, მაშინ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ზე ნაკლები გამოვა.

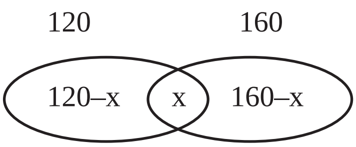
7. $2x+3x+4x=180°$.

8. $4x+5x+9x=180°$.
ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ, სასურველია ხაზი გავუსვათ: სამკუთხედი, რომლის ერთი კუთხე დანარჩენი ორის ჯამის ტოლია, მართკუთხაა.

9. ამ ათი რიცხვის ჯამია 70. შევადგინოთ განტოლება: $\frac{70+x}{11}=9$, საიდანაც $x=29$.

10. $x-11=27$ $x=38$.

11. ძმა ყავს 200-ის $\frac{3}{5}$ ნაწილს. $200\cdot\frac{3}{5}=120$ ბავშვს.
და ყავს 200-ის $\frac{4}{5}$ ნაწილს. $200\cdot\frac{4}{5}=160$ ბავშვს.



$120-x+x+160-x=200$

$x=80$

განხილულია ის შემთხვევა, როცა ყოველ მოსწავლეს ყავს ან და ან ძმა. თუ სკოლაში არიან დედისერთები, მაშინ ეს რიცხვი, ცხადია, გაიზრდება.

12. არა;

13. არა;

14. კი;

15. კი;

16. კი;

17. პასუხს ვერ გავცემთ.

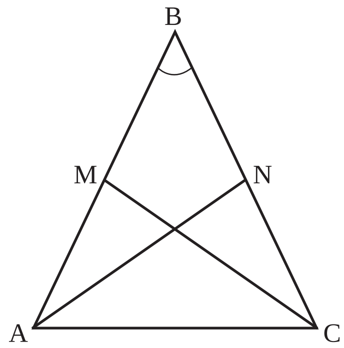
5. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებების ჩამოყალიბება, მათი სქემატური გამოსახვა. პირიქით, სქემების წაკითხვა. ტოლფერდა სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძის აგება.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ამოცანა, სასურველია, გაკეთდეს კლასში და დასკვნას ხაზი გაესვას, როგორც ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფაქტს. თავისთავად, დამტკიცება სირთულეს არ შეუქმნის მოსწავლეებს.



ა) მოც.: ΔABC

$AB=BC$

$AM=MB$; $BN=NC$

უ.დ. $AN=CM$

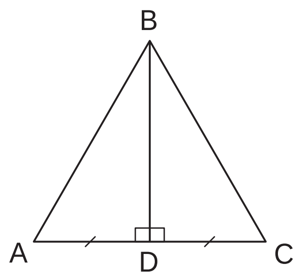
განვ. ΔABN და ΔCBM.
ისინი ტოლია I ნიშნის თანახმად.

2. ამოცანის ამოხსნამდე დავანახოთ მოსწავლეებს, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედში: $m_a=l_a=h_a$; $m_b=l_b=h_b$ და $m_c=l_c=h_c$. ალბათ, უმჯობესია ეს ამოცანა დამტკიცდეს როგორც ამოცანა I-ის შედეგი.

4. თუ მოსწავლეები სწორად იმსჯელებენ, II ამოცანის ამოხსნის დროს, ისინი სწორ დასკვნას მე-4 ამოცანისთვის იოლად გააკეთებენ.
ა. არა;
ბ. არა;
გ. კი.

5. ტოლგვერდა სამკუთხედში სამივე – სიმაღლე, მედიანა და ბისექტრისა ერთმანეთს ემთხვევა. ე.ი. ემთხვევა მათი კვეთის წერტილებიც.

6. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიმაღლე ამავე დროს მედიანაცაა, ე.ი. $AD=DC$
$A\to C$ $B\to B$
$AB\to BC$ ანალოგიური მსჯელობით $BC\to BA$ ე.ი. $\Delta ABC\to\Delta CBA$ რ.დ.გ.



8. $\dfrac{30\%x + 20\% \cdot 3}{3 + x} = 22\%$

$30x + 60 = 66 + 22x$
$8x=6$ $x=0{,}75$ლ.

9. 3-ის 7-ის 11-ის (უ.ს.ჯ.) ტოლია 231, საძიებელი რიცხვია 233.

10. ასეთი კუბები იქნება წიბოზე მდებარე კუბები, გარდა იმ კუბებისა, რომლებიც მოხვდება წვეროებში (მათ სამი წითელი წახნაგი ექნებათ). თითო წიბოზე ასეთი კუბი იქნება 4, სულ გვაქვს 12 წიბო, ე.ი. კუბების რაოდენობაა $4\cdot 12=48$.

6. სამკუთხედის ტოლფერდობის ნიშნები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს პარაგრაფში ჩამოთვლილი ნიშნების საფუძველზე სამკუთხედის ტოლფერდობის დადგენა. ტოლფერდობის ნიშნების სქემატური გამოსახვა. ტოლფერდობის ნიშნების ამოცნობა ნახაზიდან.

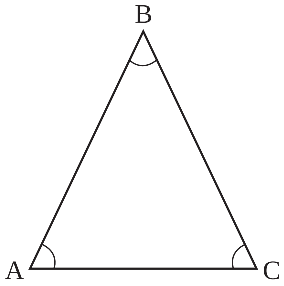
ამოხსნები, მითითებები:

1.

$(\angle A=\angle C)\Rightarrow AB=BC$

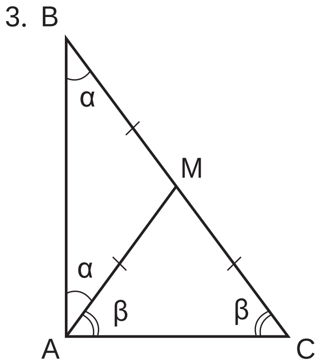
$(\angle A=\angle B)\Rightarrow AC=BC$

ე.ი. $AB=BC=AC$



2. ტოლფერდა სამკუთხედებში წვეროსთან მდებარე კუთხეების ტოლობა გვაძლევს ფუძესთან მდებარე კუთხეების ტოლობას. სამკუთხედები ტოლია მე–2 ნიშნის თანახმად.

3.



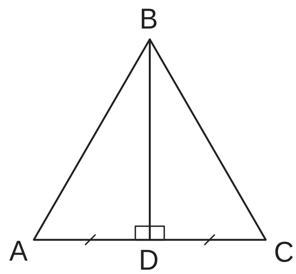
აქ ბუნებრივად კეთდება დასკვნა, რომ ასეთი სამკუთხედი მართკუთხაა.

$2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$

ე.ი. $\angle A=90^\circ$

5. მესამე კუთხე გამოდის $180°–(50°+80°)=50°$, ე.ი. სამკუთხედი ტოლფერდაა.

6. რადგან BD არის ABC სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძი, AD=DC: მივიღეთ, რომ ΔABC-ში BD სიმაღლე მედიანაცაა, ე.ი. ΔABC ტოლფერდაა (AB=BC).



7.

$$\begin{array}{rl} - & 25^6=...5 \\ + & 136^7=...6 \\ & 31^5=...1 \\ \hline & ...0 \end{array}$$

ჯამი ბოლოვდება 0-ით.

8. $25^6–136^7+315=25^6+31^5–136^7=...5+...1–...6+...6–....6=...0$

9. ა) 50°; 50°; 80°; ბ) 50°; 65°; 65°.

10. $7x+3x=180°$

$x=18°$

მოცემული კუთხე $3x=54°$.

7. სამკუთხედის გარე კუთხე

რეზიუმე:

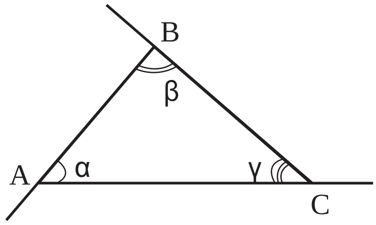
მოსწავლემ უნდა შეძლოს სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის აგება. გარე კუთხის გრადუსული ზომის განსაზღვრა, მისი შედარება სამკუთხედის დანარჩენ კუთხეებთან. სამკუთხედის გვერდებისა და კუთხეებს შორის კანონზომიერების დადგენა (უდიდესი გვერდის პირდაპირ უდიდესი კუთხეა და პირიქით, უდიდესი კუთხის პირდაპირ უდიდესი გვერდი).

სასურველია, მასწავლებელმა განუმარტოს მოსწავლეებს, რომ კუთხის აღნიშვნები „$\angle A$“ და „$\widehat{A}$“ ორივე შეიძლება გამოიყენოს. აღნიშვნა „$\widehat{A}$“ გამოიყენება ძირითადად უტოლობის ჩაწერისას, რათა უტოლობის ნიშანთან ერთად დაბნეულობა არ გამოიწვიოს.

ამოხსნები, მითითებები:

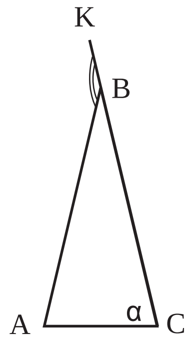
2. ABC სამკუთხედში $\angle C=60°$ A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე 130°-ია. იპოვეთ $\angle B$.
ამოხსნა: $130°=\angle B+60°$. $\angle B=70°$.

3. სამკუთხედის ორი კუთხე 30° და 80°-ია. იპოვეთ მესამე წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე.
ამოხსნა: $\alpha=80°+30°=110°$.



4. $\angle 2=180°-120°=60°$; $\angle 3=40°$; $\angle 1=80°$

5. სამკუთხედის გარე კუთხეებია $180°-\alpha$; $180°-\beta$; $180°-\gamma$.
მათი ჯამი:
$180°-\alpha+180°-\beta+180°-\gamma=3\cdot180°-(\alpha+\beta+\gamma)=3\cdot180°-180°=360°$, რ.დ.გ.



6. ა. არ შეიძლება, მაშინ სამკუთხედში ორი ბლაგვი კუთხე იქნება;
ბ. არ შეიძლება; გ. შეიძლება.

7. $\angle ABK=2\alpha$, მაგრამ $\angle ABK=\angle A+\angle C$, ე.ი. $2\alpha=\angle A+\alpha$, საიდანაც $\angle A=\alpha$, მივიღეთ AB=BC, სამკუთხედის ტოლფერდობის ნიშნის გამო.

9. ეს გარე კუთხე ტოლია $210°-180°=30°$. ფუძესთან მდებარე კუთხის გარე კუთხე ტოლგვერდა სამკუთხედში ბლაგვი უნდა იყოს. ე.ი. ეს არის წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე. მივიღეთ, რომ ამ სამკუთხედის კუთხეებია 150°; 15°; 15°.

10. როგორც ვიცით, უსჯ $(a;b)\cdot$უსგ$(a;b)=a\cdot b$, ე.ი. $ab=240\cdot8=48\cdot8\cdot5=48\cdot40$. რადგან 5-ს თანამამრავლად უმცირესი შეიცავს და ამავე დროს იყოფა 8-ზე. უმცირესი თანამამრავლი 40-ია, უდიდესი — 48.

11. ჯერ ვიმსჯელოთ ბოლო ციფრზე. ბოლო ციფრი ვერ იქნება 2; 3 და 0 (არც ერთი სრული კვადრატი არ ბოლოვდება 2-ით, 3-ით და ერთი 0-ით). ე.ი. ბოლო ციფრია 5. ნებისმიერი 5-ით დაბოლოებული რიცხვის კვადრატი ბოლოვდება 25-ით. ე.ი. საძიებელი რიცხვის კვადრატია $3025=55^2$.

12. ქალები – 35%, ე.ი. კაცები – 65%, კაცები 30%-ით მეტი არიან, ვიდრე ქალები და ეს 30% 252-ია.

$\frac{x\cdot30}{100}=252$ $x=840$.

8. ტოლგვერდა სამკუთხედი

რეზიუმე:

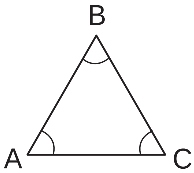
მოსწავლეებს უნდა მივუთითოთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ტოლფერდა სამკუთხედად ნებისმიერი ორი გვერდით, რის შემდეგაც თავად შეძლებენ ჩამოაყალიბონ ტოლგვერდა სამკუთხედის თვისებები.

ამოხსნები, მითითებები

ამოხსნები, მითითებები:

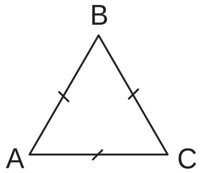
1. ა. D სიმრავლეა ტოლფერდა სამკუთხედებისა და მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლეების თანაკვეთა. ე.ი. D ყოფილა ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედების სიმრავლე.
ბ. რადგან D მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედების სიმრავლეა, კუთხეებია 45°; 45°; 90°.
გ. I მცდარია, II ჭეშმარიტია, III ჭეშმარიტია, IV ჭეშმარიტია.
„გ“ შემთხვევებში მოსწავლეებს სიტყვიერად დაახასიათებინეთ თითოეული სიმრავლე და მერე გააკეთებინეთ შესაბამისი დასკნა.

2. $\angle A=\angle C \Rightarrow AB=BC$
$\angle A=\angle B \Rightarrow AC=BC$
ე.ი. $AB=BC+AC$ რ.დ.გ.

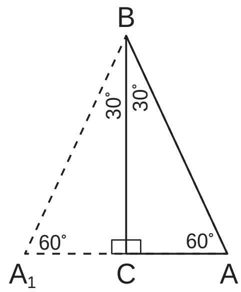


3. რადგან ტოლგვერდა სამკუთხედში სამივე სიმაღლე მედიანაცაა და ბისექტრისაც, და ამასთან, სამივე ტოლია, ორივე შემთხვევაში პასუხი იქნება 5 სმ.

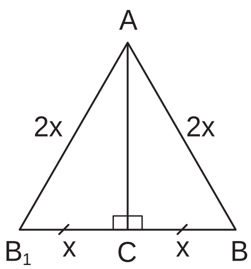
4. $AB=BC+AC\equiv X$
$3x=30 \quad x=10$



5. ავაგოთ BC წრფის მიმართ ΔABC-ის სიმეტრიული A_1BA სამკუთხედი. მიღებულ A_1BA სამკუთხედში სამივე კუთხე 60°-ია. ე.ი. A_1BA ტოლგვერდაა, საიდანაც მივიღებთ, რომ AB=6 სმ.

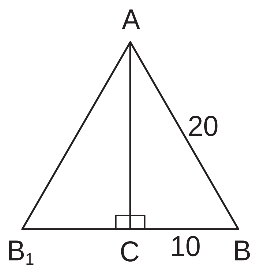


6.

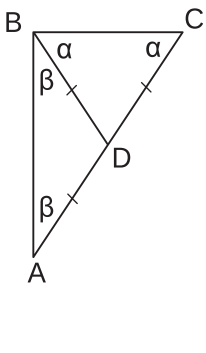


პირობის თანახმად, $BC=\frac{AB}{2}$, საიდანაც $CB\equiv x \Rightarrow AB=2x$
ავაგოთ AC წრფის მიმართ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული AB_1C სამკუთხედი. მივიღეთ B_1AB ტოლგვერდა სამკუთხედი. ე.ი. $\angle B=60^\circ$.
$\Delta ACB \Rightarrow \angle CAB=90^\circ-60^\circ=30$. რ.დ.გ.

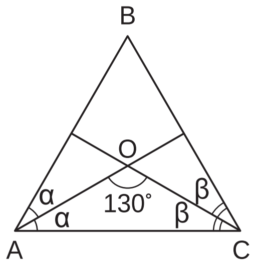
7. AC წრფის მიმართ ავაგოთ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული AB_1C სამკუთხედი. $\angle B=60^\circ$ (იხ. ამოცანა 6). ე.ი. $\angle A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.



8. $2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$ ე.ი. $\angle B=90^\circ$.



9.



$\Delta AOC \Rightarrow \alpha+\beta=50^\circ \Rightarrow 2\alpha+2\beta=100^\circ$

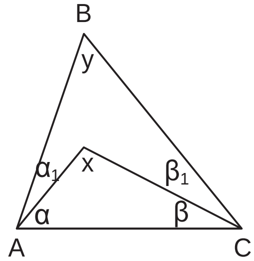
$\Delta ABC \Rightarrow \angle B=180^\circ-(2\alpha+2\beta)=80^\circ$

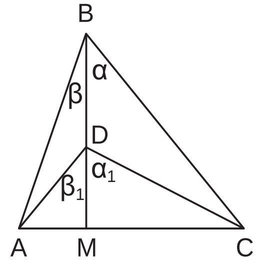
10.

I გზა $x=180^\circ-(\alpha+\beta)$

$y=180^\circ-(\alpha+\beta)-(\alpha_1+\beta_1)=x-(\alpha_1+\beta_1)$

მივიღეთ $y\angle x$ რ.დ.გ.





II გზა

$\angle CDM$ არის ΔBDC-ის გარე კუთხე.

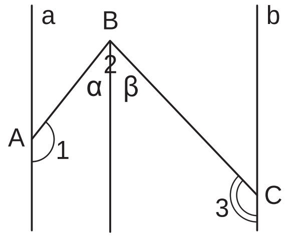
ე.ი. $\alpha_1>\alpha$. ანალოგიურად $\beta_1>\beta \Rightarrow \alpha_1+\beta_1>\alpha+\beta$ რ.დ.გ.

11. ΔADB ტოლფერდაა. ე.ი. $\angle 1=\angle BDA$. $\angle BDA$ არის ΔBDC-ის გარე კუთხე, მაშასადამე $\angle BDA>\angle 2$. საიდანაც მივიღებთ, რომ $\hat{1}>\hat{2}$ რ.დ.გ.

12. $\angle 1=180^\circ-\beta$; $\angle 2=180^\circ-\alpha$; $\angle 3=180^\circ-j$

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=3\cdot 180^\circ-(\alpha+\beta+j)=3\cdot 180^\circ-180^\circ=360^\circ$

13.



$\angle ABC=\alpha+\beta$

$\angle 1+\alpha=180^\circ \quad \angle 3+\beta=180^\circ$.

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3+\alpha+\beta=360^\circ$

14. $\angle 2+\angle 4=180^\circ$ (როგორც მოსაზღვრე კუთხეები)

$\Delta ABC \Rightarrow \angle 1+\angle 3\angle 180^\circ$

15. $\Delta BDF \Rightarrow \angle BDF+30^\circ=70^\circ$ (გარე კუთხის თვისება). ე.ი. $\angle BDF=40^\circ$.

ანალოგიური მსჯელობით $\Delta ADC \Rightarrow \angle A+20^\circ=40^\circ$ ე.ი $\angle A=20^\circ$

16. $\angle EKC\equiv X$

$\Delta ABE \Rightarrow \angle BEC=\alpha+\beta$ ($\angle BEC$ გარე კუთხეა)

$KEC \Rightarrow x+j+\angle BEC=180^\circ$

მივიღეთ $x+j+\alpha+\beta=180^\circ$, საიდანაც $x=180^\circ-\alpha-\beta-j$

9. სამკუთხედის უტოლობა

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს იმის შემოწმება მოცემული სამი სიგრძის მონაკვეთისგან შედგება თუ არა სამკუთხედი. სამკუთხედის უტოლობის დაწერა ნებისმიერი სამკუთხედისთვის. სამკუთხედის აგება მოცემული გვერდების მიხედვით.

ამოხსნები, მითითებები:

3. $a=1{,}9$; $b=0{,}7$. $c<a+b$, ე.ი. $c<2{,}6$. ამავე დროს, $c>a-b$, ე.ი. $c>1{,}2$. რადგან c-ს სიგრძე მთელი რიცხვია $c=2$.

4. განვიხილოთ ორი შემთხვევა ა) 10; 10; 25; ბ) 25; 25; 10. ა) შეუძლებელია, რადგან $10+10<25$, ე.ი. ფუძის სიგრძეა 10.

5. სამკუთხედის უტოლობით $AB<5+4$ $AB<9$ ე.ი. ჯგუფები ერთმანეთთან დაკავშირებას შეძლებენ.

6. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების მხოლოდ ერთი ვარიანტი არსებობს 5; 11; 11.

8. I ტომარაში — x $\quad x-\frac{x}{8}$

9. $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$ $\quad \frac{5}{8}=\frac{10}{16}$ ასეთი წილადებია $\frac{7}{16}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{9}{16}$.

II ტომარაში — $140-x$ $\quad 140-x+\frac{x}{8}$

$x-\frac{x}{8}=140-x+\frac{x}{8}$, საიდანაც $x=80$. $\quad$ 80კგ; 60კგ.

10. a; b; c; d. $\quad a:b=5:6$ (1) $\quad b:c=2:3$ (2) $\quad c:d=3:4$ (3)

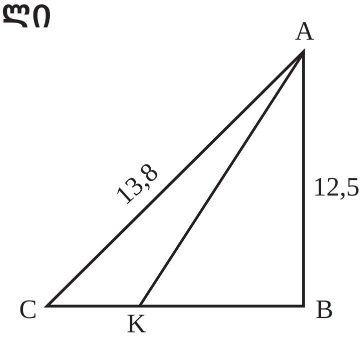
(2) და (3)-დან ვღებულობთ $b:c:d=2:3:4$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $b=2x$ მაშინ $c=3x$, $d=4x$. ჩავსვათ $b=2x$ (1)-ში.

$\frac{a}{2x}=\frac{5}{6}$, ე.ი. $a=\frac{5}{3}x$ $\quad$ მივიღეთ განტოლება: $2x+3x+4x+\frac{5}{3}x=64$, საიდანაც $x=6$.

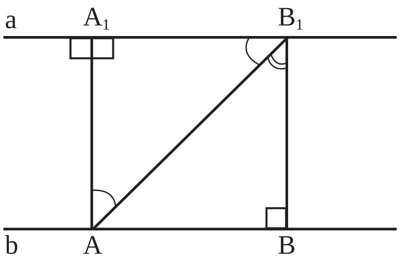
საძიებელი რიცხვებია 10; 12; 18; 24.

10. წერტილიდან წრფემდე მანძილი

ჯგუფური მეცადინეობა

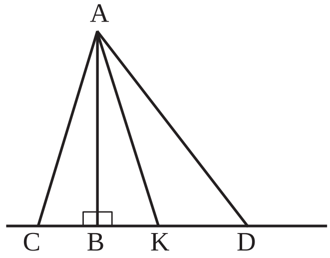


1. ΔABK მართკუთხაა $\angle B=90°$, ე.ი. AK უდიდესი გვერდია $AK>AB$. ΔACK ბლაგვკუთხაა ($\angle AKB$ მახვილია, ე.ი. $\angle AKB>90°$). ე.ი. AC უდიდესი გვერდია $AK<AC$. მივიღეთ $AB<AK<AC$. რადგან AK მთელი რიცხვია $AK=13$.



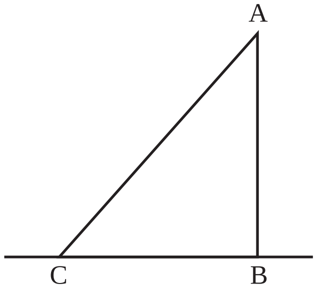
2. გან. ΔAA_1B_1 და AB_1B
$\angle A_1=\angle B=90°$. AB_1 საერთოა
$\angle A_1B_1A=\angle B_1AB$ (შიგა ჯვარედინად მდ. კუთხეებია)
$\angle A_1AB_1=\angle AB_1B$, ე.ი. $\Delta A_1B_1A=\Delta BAB_1$ (სამკუთხედის ტოლობის II ნიშანი). მივიღეთ $B_1B=AA_1=3$.

3. ა. გადავზომოთ BK=BC, ცხადია, AC=AK (AB შუამართობია). დანარჩენი იხ. ამოცანა 1.



4. წერტილიდან წრფემდე მანძილისა და სამკუთხედის სიმაღლის განმარტებების საფუძველზე ეს მანძილები მოცემული სიმაღლეების ტოლია.

5.



$AB+AC=17$
$AB=x$, მაშინ $AC=17–x$
ჩავსვათ $AC–AB=12$ ტოლობაში
$17–x–x=12$, საიდანაც $x=2,5$.
$AB=2,5$; $AC=14,5$.

6. ა. $27a^2b^2–18ab+3=3((3ab)^2–2\cdot 3ab+1))=3(3ab–1)^2$
ბ. $32a^4b–2a^2b=2a^2b(16a^2–1)=2a^2b(4a–1)(4a+1)$

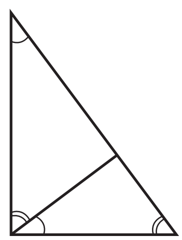
11. მართკუთხა სამკუთხედი

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების დასახელება, მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხის მეორის საშუალებით პოვნა, ორი მართკუთხა სამკუთხედის ტოლობის დადგენა პარაგრაფში ჩამოთვლილი კომპონენტების მიხედვით და შესაბამისი სქემების დახაზვა.

ამოხსნები, მითითებები:

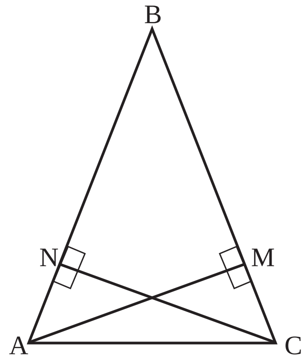
2. სასურველია ამოცანის ამოხსნის შემდეგ გაკეთდეს ზოგადი დასკვნა: თუ მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გავავლებთ სიმაღლეს, მიღებულ სამ მართკუთხა სამკუთხედს ტოლი კუთხეები აქვთ.



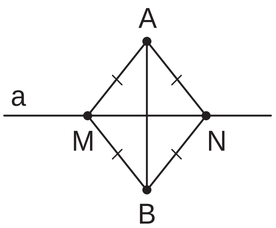
3. წინა ამოცანის გათვალისწინებით მიღებული სამკუთხედების კუთხეთა გრადუსული ზომებია: 40°; 50°; 90°.

4. განვ. ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$; მათ ტოლი აქვთ $AC=A_1C_1$; $BC=B_1C_1$. აგრეთვე B და B_1 წვეროებიდან გავლებული სიმაღლეები $BD=B_1D_1$ $\Delta BDC=\Delta B_1D_1C_1$ (მართკ. სამკუთ. ტ. III ნიშანი). ე.ი. $\angle C=\angle C$ და სამკუთხედები ტოლია I ნიშნის თანახმად.

5. $\Delta AMC=\Delta CNA$ ($AM=CN$ და AC საერთოა; $\angle N=\angle M=90°$.
ე.ი. $\angle BAC=\angle BCA$).

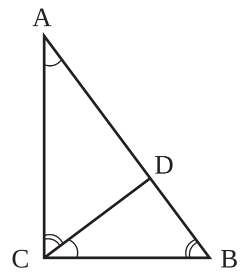


6.

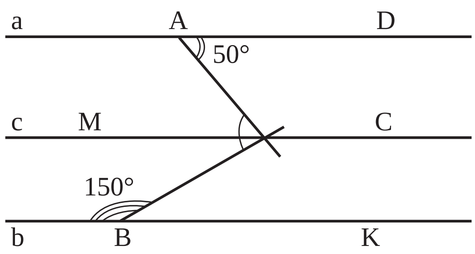


A წერტილიდან შემოვხაზოთ რკალები a წრფესთან გადაკვეთამდე (M და N წერტილები). M და N წერტილებიდან იგივე რადიუსით შემოვხაზოთ რკალები ერთმანეთთან გადაკვეთამდე (B წერტილი). ცხადია მივიღეთ ტოლფერდა სამკუთხედები საერთო MN ფუძით. A და B მათი წვეროებია. AB არის MN მონაკვეთის შუამართობი. ე.ი. $AB\perp a$.

7. კუთხეთა ტოლობის ეს სქემა მოსწავლეებმა უნდა იცოდნენ (იხ. ამოცანა 2.) $\angle CBA=\angle ACD=60^\circ$.



10.



C წერტილზე გავავლოთ c||a||b. მივიღეთ $x=\angle ACM+\angle MCB$. $\angle ACM=\angle DAC=50^\circ$ (შ.ჯ.მ.დ.კ.) $\angle MCB=\angle CBK=30^\circ$. $x=80^\circ$.

12. მობრუნება, ცენტრული სიმეტრია

რეზიუმე:

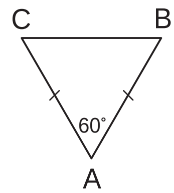
მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მოცემული ფიგურის α კუთხით მობრუნებით, O წერტილის მიმართ სიმეტრიით მიღებული ფიგურის აგება (წერტილის, მონაკვეთის, სამკუთხედის). მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში მოცემული წერტილის სიმეტრიული წერტილის აგება, კოორდინატთა სათავის, x და y ღერძების მიმართ.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა. $A_1(2;-3)$; **ბ.** $A_1(3;5)$.

2. ა. $A_1(-4;-5)$; **ბ.** $A_x(4;-5)$; **გ.** $A_y(-4;5)$.

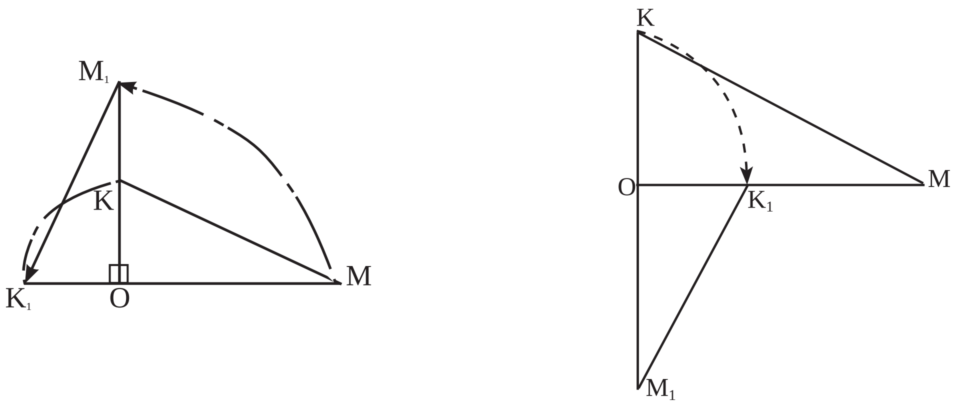
7. $A(a;b)$; $A_x(a;-b)$; $A_{x;y}(-a;-b)$.



9. რადგან B→C
ე.ი AB=AC
ე.ი ΔABC ტოლგვერდაა

10. თუ ΔABC ტოლგვერდაა, მაშინ A ცენტრის მიმართ 60˚-იანი კუთხით მობრუნებისას AB-AC. ამ ამოცანაში ხაზი გაუსვათ, რომ შეიძლება ეს მობრუნება იყოს (360˚-60˚)-ით

12.



13. იყო x კგ. გაზაფხულზე გახდა $\frac{75x}{100}=\frac{3}{4}x$ კგ. ზაფხულში გახდა $\frac{3}{4}x\cdot\frac{120}{100}=\frac{9}{10}x$, შემოდგომაზე — $\frac{9}{10}x\cdot\frac{90}{10}=\frac{81}{100}x$, ზამთარში კი — $\frac{3}{4}x\cdot\frac{120}{100}=\frac{243}{250}x<x$, ე.ი. კახა გახდა.

14. ე.ი. შესაძლოა იყოს $\frac{94x}{100}, \frac{95x}{100}, \frac{96x}{100}, \frac{97x}{100}, \frac{99x}{100}$. $\frac{95x}{100}=\frac{19x}{20}$, ე.ი. უნდა იყოფოდეს 20-ზე. ამრიგად, უმცირესი რაოდენობაა x=20.

19 გოგონა და 1 ბიჭი.

15. x კგ კიტრში „უწყლო მასა“ ტოლია $\frac{x}{100}$ კგ-ის. აორთქლების შემდეგ დარჩენილ y კგ-ში კი „უწყლო მასა“ $\frac{2y}{100}=\frac{y}{50}$. $\frac{x}{100}=\frac{y}{50}$ x=2y. დაიკარგა წონის 0,5 ნაწილი.

II თავის დამატებითი ამოცანები

1. $\alpha+\alpha+90°=180°$. პარალელურგვერდებიანი კუთხეები ან ტოლია, ან მათი ჯამი 180°-ია.

2. $\alpha+2\alpha=180°$.

3. არ შეიძლება. ასეთი კუთხეებიდან ნებისმიერი წყვილი ან ტოლია ან ჯამში 180°-ს გვაძლევს.

5. შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180°-ია, მათი ნახევრების — 90°. ე.ი. ბისექტრისებს შორის კუთხე 90°-ია.

8. $\angle BAC=\angle BCA=72°$. AD ბისექტრისაა, ამიტომ $\angle BAD=\angle DAC=36°$. კუთხეების ტოლობის გამო AD=BD=AC.

9. პარალელურგვერდებიანი კუთხეების თვისების თანახმად (ან ტოლია, ან ჯამი 180°-ია), მიღებული სამკუთხედის კუთხეები ABC სამკუთხედის კუთხეების ტოლია.

10. სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე კუთხეების ჯამის ტოლია, ე.ი. თითოეულზე მეტია.

11. იხ. ამოცანა 10.

12. ჯგუფები ერთმანეთთან დაკავშირებას შეძლებენ, რადგან სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, დაბანაკებულ ჯგუფებს შორის მანძილი ნაკლებია 15+13=28-ზე.

13. ა. (1;–1) ბ. (–1;1)

14. (–1;–1)

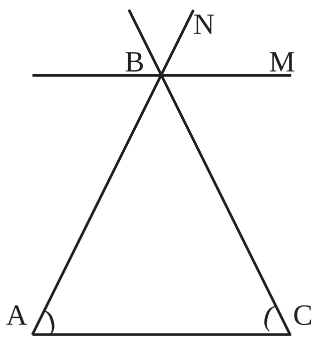
15. ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა ფერდის მართობულია, ე.ი. სიმაღლეა, ამიტომ ფუძე ფერდის ტოლია.

16. $\angle ADB=180°-\left(\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ABC}{2}\right)=180°-\frac{\angle BAC+\angle ABC}{2}$.

ა) 105°; ბ) $180°-\frac{\alpha+\beta}{2}$; გ) $180°-\frac{180°-\gamma}{2}=90°+\frac{\gamma}{2}$.

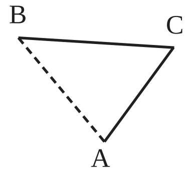
17. $\angle A=\alpha$; $\angle ABD=90°-\alpha$; $\angle C=180°-(\alpha+\beta)$, $\angle CBD=\alpha+\beta-90°$.

18.



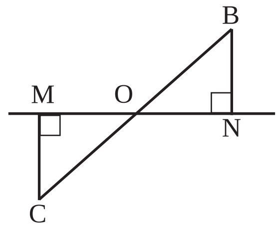
$\angle NBC=\angle A+\angle C=2\angle C$, $\angle MBC=\frac{\angle NBC}{2}=\angle C$, $\angle MBC$ და $\angle C$ წარმოადგენენ შ. ჯვ. მდ. კუთხეებს BM და AC პარალელურ წრფეებსა და BC მკვეთისათვის. ე.ი. MB||AC.

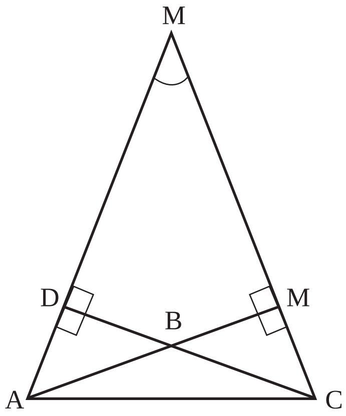
19. AC=200მ; CB=800მ. თავისი სიჩქარით 20 წთ-ში გიორგის $50\cdot20=1000$ მ-ის, ანუ 1 კმ-ის გაცურვა შეუძლია. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $AB<BC+AC$, ე.ი. გიორგი თავის სიტყვას შეასრულებს.



20. ABC მართკუთხა სამკუთხედში (C=90°). B კუთხის გარე კუთხეა 122°. ე.ი. ∠B=58°, ე.ი. უდიდესი კათეტია AC. ე.ი. საძიებელი კუთხეა ∠ACK (CK სიმაღლეა) ∠ACK=∠B=58°.

21. განვ. ΔDMC და ΔDNB სამკუთხედები. ისინი ტოლია მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად, ე.ი. BN=CM.





23. AD⊥BC; CE⊥AB; AD=CE. ვიღებთ ∠MAC=∠MCA, ∠M=60°. ΔAMC — ტოლგვერდაა, ე.ი. ∠MAC=∠MCA=60°. ∠AME-ში ∠MAE=30°, ე.ი. ∠BAC=30°=∠BCA; ∠ABC=120°.

24. სამკუთხედის ერთ წვეროსთან მდებარე შიგა და გარე კუთხის ბისექტრისები ქმნიან 90°-იან კუთხეს, ე.ი. საძიებელი კუთხეა 50°.

25. BC=CD, ე.ი. ∠CBD=∠CDB, მაგრამ ∠CDB=∠ABD (AB||CD, BD მკვეთია), ე.ი. ∠DBC=∠ABD.

26. ვთქვათ ABC სამკუთხედში გავლებულია AK ბისექტრისა და ∠AKC=98°, მაშინ, ცხადია, AK=AB (ის AC ფერდის ტოლი არ იქნება). ∠AKB=180°–98°=82°=∠B. ე.ი. ∠B=82°, ∠BAK=16°, ∠BAC=32° და ∠C=66°.

27. კუთხე ბისექტრისას და მოც. სამკუთხედის ჰიპოტენუზას შორის იქნება ამ ბისექტრისით შექმნილი იმ სამკუთხედის გარე კუთხე, რომელშიც მოხვდა 30°-იანი კუთხე. ე.ი. 30°+45°=75°.

28. $\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}-(90^\circ-\beta)$ **,** სადაც α და β მოცემული სამკუთხედის კუთხეები და β>α.

29. ეს სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

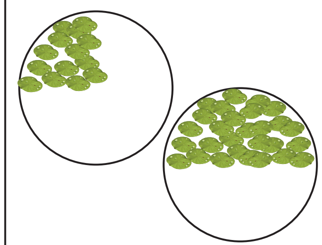
ტესტი თვითშემოწმებისთვის

1. გ; 2. ბ; 3. გ; 4. გ; 5. გ; 6. ბ; 7. გ; 8. გ; 9. ბ; 10. ბ. 11. გ.

III თავი

<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: ალგებრა და კანონზომიერება</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 10-12</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• რიცხვებს შორის არის კავშირი;
• არითმეტიკულ მოქმედებებს შორის არის კავშირი;
• ხარისხი არ არის ახალი მოქმედება, ხარისხი არის ტოლი თანამამრავლების ნამრავლის მოკლე ჩანაწერი;
• ნებისმიერი რიცხვი შესაძლებელია ჩაიწეროს ტოლფუძიანი ხარისხების ჯამის სახით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების ან გამოსახულების მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნებები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">კავშირები
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში;
ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა;
• ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეძლება წარმოვადგინოთ მასზე ნაკლები ნატურალური რიცხვის ხარისხების ჯამის სახით</td><td>• ხარისხი;
• ხარისხის თვისებები;
• ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი, განაყოფი;
• ტოლი ხარისხების გამრავლება-გაყოფა;</td><td>1. როგორი სხვადასხვა გზებით არის შესაძლებელი რიცხვის წარმოდგენა?
2. რას ნიშნავს ეკვივალენტური ფორმები?
3. რამდენი სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით (ფორმულით) შეიძლება წარმოვადგინოთ რიცხვი?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში მოიძებნება პროცესები, რომლებიც აღიწერება ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხით სახით.
ამ ხარისხის თვისებები შესაბამისად ახასიათებენ აღნიშნულ მოვლენას.
კომპლექსური დავალება
განიხილეთ სიტუაცია:
ტბაზე პირველი ყვავილის გაჩენის მომენტიდან</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს ჩამოწერონ მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები;
საკვანძო შეკითხვა: ა) ა რიცხვი გაამრავლეს თავის თავზე 7-ჯერ. შედეგი ჩაწერე ხარისხის სახით;
ბ) კოლბაში მოათავსეს ბაქტერია, რომელიც ყოველ ერთ საათში სამმაგდება. რამდენი ბაქტერია იქნება კოლბაში 10 საათის შემდეგ?
აქტივობა 2:
სიმულაცია 1: მასწავლებელმა მოსწავლეებს უხატავს ნახევრად სავსე კოლბას და დასვამს კითხვას: რამდენ საათში გაივსება კოლბა ბაქტერიებით?:
სიმულაცია 2: თუ კოლბა ივსება 11 საათში, მაშინ, პირველი ბაქტერიის ჩასმის მომენტიდან რამდენ საათში იქნება კოლბა ნახევრად სავსე?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="5">• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• განტოლებაში (უტოლობაში) შესაბამისი ოპერაციების განხორციელების შედეგად მიიღება ტოლფასი განტოლება (უტოლობა).

მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლებისგან
• გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისათვის.
• ფუნქციების ცვლილება შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შესაბამისი გრაფიკული გარდაქმნებით;</td>
<td>ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• რა არის ხარისხი?
• ხარისხის რომელი თვისებები გაქვთ ნასწავლი?
• რის ტოლია 0-ის ნებისმიერი ხარისხი?
• რის ტოლია 1-ის ნებისმიერი ხარისხი?
• რის ტოლია რიცხვის 0 ხარისხი?
• როგორ ფიქრობთ, რატომ არ განიმარტება 0-ის 0 ხარისხი?</td>
<td rowspan="4">ყოველდრიურად ყვავილების რაოდენობა ორმაგდება.
დააკვირდით ილუსტრაციას და უპასუხეთ შეკითხვებს:
1. პირველ ნახატზე მოცემული მომენტიდან რამდენ დღეში დაიფარება ტბა სრულად?
2. მეორე ნახატზე მოცემული მომენტიდან რამდენ დღეში დაიფარება ტბა სრულად?
3. პირველი ყვავილის გაჩენიდან მერამდენე დღეს დაიფარება ტბის ზედაპირის მეთექვსმეტედი, თუ ვიცით, რომ ტბა სრულად იფარება 15 დღეში?
პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ:
აღწერეთ მოცემული პროცესი მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის საშუალებით.
</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
აქტივობა 2:
• მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას შეავსონ ცხრილი
კვლევა: კვლევის შედეგად მოსწავლეებმა უნდა დაადგინონ რომ:
არსებობს ექვივალენუტრი ფორმები. გააცნობიერონ მათი საჭიროება და უპირატესობები, გაიაზრონ,თუ რა წესით ხდება რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა;</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.
საკვანძო შეკითხვა: როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს?
აქტივობები: მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს.</td>
</tr>
<tr>
<td>კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)
ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.</td>
</tr>
<tr>
<td>რესურსები: მოსწავლის წიგნი. თავი 1.</td>
<td>შეფასების კრიტერიუმი: განმავითარებელი შეფასება.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: ალგებრა და კანონზომიერება</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 10-12</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: წილადი, ალგებრული წილადი.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• მოცემული წილადი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ორი ან რამოდენიმე წილადის ჯამის ან სხვაობის სახით.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების ან გამოსახულების მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: წილადი, ალგებრული წილადი.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნე-ბები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემა-ტიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;</td><td>• წილადი;
• ალგებრული წილადი;
• წილადური გან-ტოლება;
• წილადური გან-ტოლებით რეალური სიტუაციის აღწერა.</td><td>1. როგორი სხვადასხვა გზებით შეიძლება კავშირების (დამოკიდებულების) წარმოდგენა?
2. რას ნიშნავს ეკვივალენტური ფორმები?
3. შესაძლებელია თუ არა სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით გადავჭრათ პრობლემა?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში არსებობს პრობლემური სიტუაციები, რომელიც წილადის წილადური გამო-სახულების საშუალებით გადაწყდება.. შესაბამისად ეს პროცესები ამ გამო-სახულებით აღიწერება.</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ამოცანა 1
ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს ჩამოაყალიბონ, თუ რა გზით შეი-ძლება პრობლემის გადაჭრა;
საკვანძო შეკითხვა:
ა) შესაძლებელია თუ არა ამოცანის პირობის შესაბამისი განტოლების შედგენა?
ბ) შეძლებთ თუ ვერა მრავალცვლადიანი განტოლების ამოხსნას?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="4">ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა;
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• განტოლებაში შე-საბამისი ოპერაციების განხორციელების შედე-გად მიიღება ტოლფასი განტოლება</td>
<td>ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შეს-რულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• მთელი ნამცხვრების რა ნაწილი შეხვდება ერთ ბავშვს? (9/20 ნაწ.)
• შესაძლებელია თუ არა წილადის (9/20)წარმოდგენა ორი წილადის ჯამის სახით? (9/20=1/4+1/5)
• ასახავს თუ არა მიღებული ტოლობა პრობლემის გადაჭრის რომელიმე ეტაპს??</td>
<td rowspan="4">კომპლექსური დავალება:
1.როგორ გავუნაწილოთ თანაბრად 9 ნამცხვარი 20 ბავშვს ისე, რომ შევას-რულოთ რაც შეიძლება ნაკლები გაჭრა

2. შიკრიკმა A-დან B პუნქტში ჩაი-ტანა ამანათი და მაშინვე უკან გამო-ბრუნდა. რამდენ საათში დაბრუნდება შიკრიკი B პუნქტში, თუ A-დან B-მდე გზაზე სწორი მონაკვეთი არ არის, აღმართია 28კმ, დაღმართი 32კმ, ამას-თან შიკრიკის სიჩქარეა აღმართზე 15კმ/სთ, დაღმართზე კი 20კმ/სთ.

თითოეული ამოცანისათვის:
• აღწერეთ მოცემული პროცესი.
• მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.

იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემ-დეგ მისამართზე:
https://teacher.desmos.com/activitybuild-er/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის და-მუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას:
9/20=1/4+1/5 ტოლობის საფუძველზე წარმოადგინონ პრობლემის გადაჭრის დემონ-სტრირება. (4 ნამცხვარი გავჭრათ თითო 5 ნაწილად, 5 კი თითო 4 ნაწილად)</td>
</tr>
<tr>
<td>ამოცანა 2
ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს შეადგინონ ამოცანის პირობის შესა-ბამისი განტოლება და ამოხსნან;
საკვანძო შეკითხვა: შესაძლებელია თუ არა ამოცანის ამოხსნა განტოლების შედგენის გარეშე?</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შეს-რულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• შესაძლებელია თუ არა A-დან B-მდე მანძილის პოვნა?
• A-დან B-მდე და უკან B-დან A-მდე აღმართი მეტი გაიარა თუ დაღმართი?
• სულ რამდენი კილომეტრი გაიარა ა) აღმართი, ბ) დაღმართი?
• რა დრო მოანდომა შიკრიკმა აღმართების გავლას?
• რა დრო მოანდომა შიკრიკმა დაღმართების გავლას?</td>
</tr>
</table>

მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა; • მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.	**ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **აქტივობა 1.** მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს ჩამოაყალიბონ ამოცანის ამოხსნა (დანარჩენი ეხება ორივე ამოცანას) **აქტივობა 2:** მოსწავლემ უნდა გაიაზროს, რომ პრობლემის გადასაჭრელად არსებობს ექვივალენუტრი ფორმები და მათი საჭიროება და უპირატესობები; კავშირი ეკვივალენტურ ფორმებს შორის; კავშირი ცვლადებს შორის; რა წესით ხდება რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა;	კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით. **საკვანძო შეკითხვა:** როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს? **აქტივობები:** მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს.	
	კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები) **ეტაპი I.** მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.	
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი თავი 3	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება.

1. ხარისხი მთელი მაჩვენებლით

რეზიუმე:
მოსწავლემ უნდა შეძლოს უარყოფითი მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ჩაწერა დადებით მაჩვენებლიანი ხარისხის სახით და მისი მნიშვნელობის გამოთვლა.
რიცხვის ჩაწერა სტანდარტული სახით და პირიქით.
დაინახოს, რომ მოდულით ძალიან დიდი ან მცირე რიცხვების ჩასაწერად მოსახერხებელია ამ რიცხვის სტანდარტული სახით ჩაწერა.
ამოხსნები, მითითებები:

8. ა) 0,0056; ბ) 0,0000005. **7.** ა) $2,7\cdot10^{19}$; ბ) $1,36\cdot10^{-8}$.

11. 1მ$^3=(1000$მმ$)^3=10^9$მმ^3.

13. ა) 0,0001წმ; ბ) 0,0000000001მ; გ) 511000000კმ^2; დ) 149000000კმ^2.

14. $11\cdot10^9$წ$=11\cdot10^9\cdot365\cdot24\cdot36\cdot10^2$. $S_1=15\cdot10^9\cdot365\cdot24\cdot36\cdot10^2$წმ$\cdot3\cdot10^5$კმ/წმ$\approx1,4\cdot10^{23}$კმ.

16. 5ლ=5დმ$^3=5\cdot10^6$მმ^3 სისხლი შეიცავს $5\cdot10^6\cdot5\cdot10^6=25\cdot10^{12}=2,5\cdot10^{13}$ წითელ სხეულს.

25. $\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\ldots+\frac{10-9}{9\cdot10}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

26. 45 წთ$=\frac{3}{4}$სთ. $\frac{3}{4}(10-x)=3x$ $x=2$კმ/სთ.

2. მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები

რეზიუმე:
მოსწავლემ უნდა შეძლოს მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულების გამარტივება და მნიშვნელობის გამოთვლა.

ამოხსნები, მითითებები:

4. $(a^2-b^2)^2$; ბ) $((m+n)(m^2-mn+n^2))^{-3}=(m^3-m^2n+mn^2+nm^2-mn^2+n^3)^{-3}=(m^3+n^3)^{-3}$.
გ) $(y^2-x^2)^{-6}$.

6. ა) $16^5=(2^4)^5=2^{20}$; ბ) 5^{-6}; ე) 3^{-4k}.

7. გ) $\frac{14^{-7}\cdot7^{10}}{2^{-3}\cdot49}=\frac{2^{-7}\cdot7^{-7}\cdot7^{10}}{2^{-3}\cdot7^2}=\frac{7}{2^4}=\frac{7}{16}$; დ) $\frac{125^{-4}\cdot49^5}{25^{-6}\cdot7^8}=\frac{5^{-12}\cdot7^{10}}{5^{-12}\cdot7^8}=49$;

ე) $\frac{15^{-6}\cdot625^2}{27^{-1}}=\frac{3^{-6}\cdot5^{-6}\cdot5^8}{3^{-3}}=\frac{5^2}{3^3}=\frac{25}{27}$; ვ) $\frac{(12m^5n^{-2})^2}{(m^{-3}n^{-4})^{-1}}=12^2m^{10}n^{-4}m^{-3}n^{-4}=\frac{144m^7}{n^8}$

9. ა) $(10^{10})^7=10^{70}=\underbrace{10...0}_{70}$; ბ) $10^{(10^7)}=10^{\overbrace{10...0}^{7}}=\underbrace{10...0}_{10000000}$, ე.ი. 10000000 ნულით;

გ) $(10^{100})^{(10^{100})}=(10^{100})^{\overbrace{10...0}^{100}}=10^{\overbrace{10...0}^{102}}=\overbrace{10...0}^{10^{102}}$, ე.ი. $\underbrace{10...0}_{102}$ ნულით.

დ) $10^{((10^{10})^{10}}=10^{(10^{100})}=\underbrace{10...0}_{10^{100}}$, ე.ი. 10^{100} ნულით.

10. $2^{60}=(2^{10})^6\approx(10^3)^6=10^{18}$. თან $2^{60}>10^{18}$ ნულით.

11. ციფრთა ჯამი გაიყოფა 3-ზე.

12. ვთქვათ ღირდა x ლარი. ახლა ღირს $\frac{4}{5}$x ლარი. უნდა გაძვირდეს $\frac{x}{5}$-ით. ე.ი. $\frac{x}{5}:\frac{4}{5}x\cdot100\%=\frac{1}{4}\cdot100\%=25\%$-ით.

13. ვთქვათ ღირდა x ლარი. I. $x+\frac{50}{100}x=\frac{3}{2}x$. II. $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x\cdot\frac{10}{100}=\frac{27}{20}x=\frac{135}{100}x$, ე.ი. 35%-ით.
ან ასეც: იყო 100%, გახდა 150%. გაიაფების შემდეგ გახდა 150%-ის 90%=$\frac{150\cdot90}{100}$=135%. ე.ი. მეტია 35%-ით.

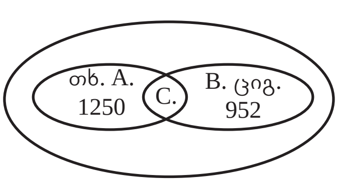
15. ბ) თუ n=3k-ს, მაშინ ნაშთია 0; თუ n=3k+1, მაშინ ნაშთია 1; თუ n=3k+2, $(3k+2)^2=9k^2+12k+4$, ნაშთია 1.

გ) 1. $(7k+1)^2:7=...$ (1); 2. $(7k+2)^2:7=...$ (4); 3. $(7k+3)^2=...$ (9). ე.ი. 2;

4. $(7k+4)^2=...+16$, 16:7=2 (2); 5. $(7k+5)^2=...+25$, 25:7=... (4); 6. $(7k+6)^2:7=...36$, 36:7=...(1). ე.ი.

შესაძლოა ნაშთებია: 0; 1; 2; 4.

16.



N(A∪B)=1400–60=1340 (მოსწავლე)
N(C)=N(A)+N(B)–N(A∪B)
N(C)=1250+952–1340=862 (მოსწავლე)

N(A)=A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

17. ა) $5\cdot10^7+4\cdot10^4+10^2+2$ რიცხვის ციფრთა ჯამია 5+4+1+2=12.

3. წილადური გამოსახულება

რეზიუმე:

მოსწავლე უნდა ასხვავებდეს რიცხვით წილადს და წილადურ გამოსახულებას, უნდა შეძლოს წილადური გამოსახულების განსაზღვრის არის დადგენა და ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობის პოვნა.

ამოცანები:

14. ვახომ გაიარა t წამში, მაშინ ნიკამ გაიარა (t–5) წამში. ნიკას სიჩქარეა $\frac{200}{t-5}$ მ/წმ, ვახოსი კი $\frac{200}{t}$ მ/წმ.

15. ვთქვათ, მიხო პაპას ნაკვეთია x ჰა, მაშინ ვანო პაპასი იქნება x+2 ჰა. რადგან მიხო პაპამ სულ 10 ტ. ყურძენი აიღო, ე.ი. მან 1 ჰექტარზე საშუალოდ აიღო $\frac{10}{x}$ ტონა. ანალოგიურად ვანო პაპამ 1 ჰექტარზე აიღო $\frac{15}{x+2}$ ტონა.

17. შევადგინოთ ცხრილი:

	მიიღო	გაყიდეს	დარჩა
I დღე	x	$\frac{2}{5}x$	$x-\frac{2}{5}x=\frac{3}{5}x$
I დღე	$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x\cdot\frac{60}{100}=\frac{9x}{25}$	$\frac{3x}{5}-\frac{9x}{25}=\frac{15x-9x}{25}=\frac{6x}{25}$

დარჩა $\frac{6}{25}$ ნაწილი.

18. $1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

19. ა. რადგან 10-ს გვაძლევს 2-ისა და 5-ის ნამრავლი, გვაინტერესებს რამდენი წყვილი 2 და 5-ის შეგვხვდება, მაგრამ, რადგან 2-იანი მეტი შეგვხვდება ვიდრე 5, ამიტომ დავთვალოთ რამდენია ხუთიანი.
1-დან 99-მდე გვხვდება $\frac{99}{5}$ წილადის მთელი ნაწილი, ე.ი. 19 ცალი 5-იანი, მაგრამ 25-ის ჯერადი კი არის $\frac{99}{25}=3\frac{24}{25}$ რიცხვის მთელი ნაწილი, ე.ი. 3 ცალი 5-იანი. სულ არის 19+3=22 ხუთიანი. ერთნიშნიანებში იყო ერთი, ე.ი. ორნიშნიანებში დარჩა 21 ხუთიანი. მაშასადამე, გვექნება 21 ცალი ნული.
ბ. a რიცხვის მთელი ნაწილი აღვნიშნოთ [a], 1-დან 150-მდე ნულების რაოდენობა იქნება.
$\left[\frac{150}{5}\right]+\left[\frac{150}{25}\right]+\left[\frac{150}{125}\right]=30+6+1$. იქნება 37 ნული მაგრამ 1-დან 99-ის ჩათვლით იყო 22 ნული. ე.ი. პასუხებია 37-22=15 ნული.

20. $\left(4^{-1}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)\cdot\frac{3}{34}=\left(\frac{1}{4}-3\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{3}{34}=\frac{1-18}{4}\cdot\frac{3}{34}=-\frac{17}{4}\cdot\frac{3}{34}=-\frac{3}{8}$.

21. ყოველი 5 გაგორების შემდეგ ბურთი უბრუნდება ერთსა და იმავე მოთამაშეს, რადგან მოთამაშეების რაოდენობაა 5. ე.ი. 75 გაგორების შემდეგ ბურთი უნდა დაუბრუნდეს გურამს. და რადგან გურამი ბურთს ილებს ნატოსგან, ე.ი. 74 გაგორების შემდეგ ბურთი აქვს ნატოს.

22. I მანქანის სიჩქარეა $\frac{1}{200}$ ნაწ/წთ. 1 სთ 20 წთ=84 წთ. ე.ი. I გაივლის $\frac{1}{200}\cdot84=\frac{21}{50}$ ნაწ. მეორე კი $\frac{1}{168}\cdot84=\frac{1}{2}$ ნაწ. მათ შორის იქნება $1-\frac{1}{2}-\frac{21}{50}=\frac{1}{2}-\frac{21}{50}=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$ ნაწ.

4. წილადების შეკრება და გამოკლება

ამოხსნები, მითითებები:

9. ა) $\frac{3a+2b}{a}=\frac{3a}{a}+\frac{2b}{a}=3+\frac{2b}{a}$; ბ) $\frac{x-6+a}{x-6}=\frac{x-6}{x-6}+\frac{a}{x-6}=1+\frac{a}{x-6}$;

გ) $\frac{b-2a+c}{2a-b}=\frac{b-2a}{2a-b}+\frac{c}{2a-b}=-1+\frac{c}{2a-b}=\frac{c}{2a-b}-1$;

დ) $\frac{3a+8}{a+2}=\frac{3a+6+2}{a+2}=3+\frac{2}{a+2}$; ე) $\frac{2x+4}{x-1}=\frac{2x-2+6}{x-1}=2+\frac{6}{x-1}$.

11. შევადგინოთ ცხრილი, რისთვისაც ნავის საკუთარი სიჩქარე აღვნიშნოთ x-ით.

	S	V	t
დ. მიმ.	30 კმ	(x+3) კმ/სთ	$\frac{30}{x+3}$ სთ
დ. საწ.	20 კმ	(x–3) კმ/სთ	$\frac{20}{x-3}$ სთ

სულ დახარჯა $\left(\frac{30}{x+3}+\frac{20}{x-3}\right)$ სთ.

12. ვთქვათ, მოცემული წილადი იყო $\frac{a}{a+3}$. ახალი წილადი იქნება $\frac{a}{a+3+5}=\frac{a}{a+8}$.
გამოსახულებას ექნება სახე: $\frac{a}{a+3}-\frac{a}{a+8}$.

13. ა) ვთქვათ, I მუშას სამუშაოს შესრულება შეუძლია x დღეში, მაშინ II მუშა ამ სამუშაოს შეასრულებს (x+3) დღეში. I-ის მუშაობის სიჩქარეა $\frac{1}{x}$ ნაწ/დღეში. მეორის კი $\frac{1}{x+3}$ ნაწ/დღეში და რადგან მათ იმუშავეს 6 დღე, I-მა შეასრულა $\frac{6}{x}$ ნაწ. II-ემ კი $\frac{6}{x+3}$ ნაწ. ე.ი. მათ შეასრულეს სამუშაოს $\left(\frac{6}{x}+\frac{6}{x+3}\right)$ ნაწილი.

ბ) შევადგინოთ ცხრილი:

	დრო, რომელშიც შეუძლია მთელი სამუშაოს შესრულება	v	t	s
I	x დღე	$\frac{1}{x}$ ნაწ/დღ.	3 დღე	$\frac{3}{x}$ ნაწ.
II	x+3 დღე	$\frac{1}{x+3}$ ნაწ/დღ.	5 დღე	$\frac{5}{x+3}$ ნაწ.

ორივემ ერთად შეასრულა სამუშაოს $\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x+3}\right)$ ნაწილი.

14. ა)

	დრო, რომელშიც შეუ-ძლია მთელი სამუშაოს შესრულება	v	t	s
I	x+1 სთ	$\frac{1}{x+1}$ ნაწ/სთ.	5 სთ	$\frac{5}{x+1}$ ნაწ.
II	x სთ	$\frac{1}{x}$ ნაწ/სთ.	5 სთ	$\frac{5}{x}$ ნაწ.

აივსება $\left(\frac{5}{x+1}+\frac{5}{x}\right)$ ნაწილი.

16. დღე-ღამეში 24 საათია, რაც 24·60 წუთია. $\frac{24\cdot 60}{10}$=24·6=144. ე.ი. დაიკარგება 144-ჯერ ნახევარი ლიტრი, რაც 72 ლიტრია.

17. $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$, ხოლო $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$. ე.ი. გვაინტერესებს რამდენი მთელი რიცხვია 16-სა და 21-ს შორის. 21–16–1=4.

18. სულ არის 25 პატარა კვადრატი. ე.ი. პატარა კვადრატის ფართობია 2 სმ^2. ოცდახუთი პატარა კვადრატიდან გაფერადებულია 17, რაც იმას ნიშნავს, რომ გაფერადებულია დიდი კვადრატის $\frac{17}{25}$ ნაწილი, რომლის ფართობია 17·2სმ^2=34სმ^2.

20. ა) ტოლფერდა სამკუთხედში სამივე კუთხე ტოლი არ არის; ბ) ჩვენს კლასში ხუთი ათოსანი მოსწავლე არ არის; გ) მაკამ მინა არ გატეხა; დ) ყველა ბიჭს ფეხბურთის თამაში არ უყვარს; ე) ყველა მგელი მტაცებელი არ არის.

22. $\frac{537-x}{463+x}=\frac{1}{9}$;   x=437.

5. წილადების გამრავლება და გაყოფა

ამოხსნები, მითითებები:

8. ა) მც;   ბ) ჭ;   გ) მც;   დ) ჭ.

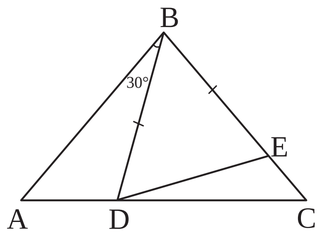
9. რადგან $a\oplus b=a+5b$, მაშინ $5\oplus x=5+5x$, მივიღეთ $5+5x=95 \Rightarrow x=18$.

10. 1 საათის განმავლობაში ისრები ორჯერ ადგენენ მართ კუთხეს (ერთხელ როცა დაეწევა დიდი ისარი პატარას, მეორეჯერ, როცა გაასწორებს). რადგან დღე-ღამეში 24 საათია, ეს გამოდის 24·2=48.

11. ეს ამოცანა შეიძლება ასე გადაითარგმნოს. რამდენი წრფე გაივლება 10 წერტილზე, რომელთაგან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს (n წერტილისათვის გამოითვლება $\frac{n(n-1)}{2}$ ფორმულა) $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

12. ΔABK და ΔCFD ტოლობიდან ადვილად მტკიცდება შესაბამის წრფეთა პარალელობა.

13.



შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\angle C=\angle A=\alpha$, მაშინ

$\angle DBE=180°-2\alpha-30°=150°-2\alpha$, რადგან DB=BE მივიღებთ

$\angle BED=\frac{180°-(150°-2\alpha)}{2}=15°+\alpha$, მაგრამ $\angle BED$ გარე კუთხეა

ΔDEC-სთვის, სადაც $\angle C=\alpha$, ე.ი. $\angle EDC=15°$.

ტესტი:

1. გ; **2.** ბ; **3.** ბ; **4.** ბ; **5.** ა; **6.** დ; **7.** ბ; **8.** გ; **9.** გ; **10.** ბ.

6. წილადური გამოსახულებების გამარტივება

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს წილადებზე მოქმედებების შესახებ მიღებული ცოდნის გამოყენება გამოსახულებათა გამარტივებისას.

ამოხსნები, მითითებები:

13. $t = \frac{S}{V}$. $S=t \cdot U=\frac{S}{V}U$.

14. $t=\frac{S}{V+V_1}$. $S_1=t\cdot(V-V_1)=\frac{S}{V+V_1}(V-V_1)$.

15. 1996+415–1096+585=(1996–1096)+(415+585)=900+1000=1900.

17. AB=|-11–(-7)|=|-11+7|=|-4|=4.

18. I. A წერტილში მოხვდება ყოველ $\frac{600}{5}$=120 წამში, II — $\frac{800}{5}$=160 წამში, III — $\frac{900}{5}$=180 წამში. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ 120, 160 და 180-ის უმცირესი საერთო ჯერადი, რაც 1440-ის ტოლია. 1440წმ=24წთ.

19.

I	x	$\frac{15x}{100}$
II	72–x	$\frac{25(72-x)}{100}$

გაიზარდა 86–72=14

$\frac{3x}{20}+\frac{5(72-x)}{20}$=14, საიდანაც x=40.

20. 1. 6,127; **2.** 612,7; **3.** 613; **4.** 625; **5.** 625.

21. მე-2 საფეხურზე მიღებული რიცხვი 0-სა და 990-ს შორისაა. მე-3 საფეხურის რიცხვი ეკუთვნის [1;990] შუალედს, ის მთელია. მე-4 საფეხურის რიცხვი [13;1002] შუალედს და აგრეთვე მთელია. მოცემული რიცხვებიდან გამოდგება მხოლოდ დ. 674.

22. $24=\frac{6}{100}y \Rightarrow y=400$; $y=\frac{4}{5}x \Rightarrow 400=\frac{4}{5}x$ ე.ი. x=500

23. $a=\frac{3b}{5}=\frac{60b}{100}$ 60%

7. წილადური განტოლება

ამოხსნები, მითითებები:

6. ვთქვათ წილადის მრიცხველი იყო 3x (ასეთი აღნიშვნა განაპირობა იმან, რომ მრიცხველი უნდა შევამციროთ 3-ჯერ). მაშინ მნიშვნელი იქნება 3x+2. ე.ი. წილადი იყო $\frac{3x}{3x+2}$ ახალი წილადი იქნება $\frac{x}{3x+2+3}$, რომელიც $\frac{1}{8}$-ის ტოლია, ე.ი. $\frac{x}{3x+5}=\frac{1}{8} \Rightarrow 8x=3x+5 \Rightarrow x=1$ თავდაპირველი წილადი იქნება $\frac{3\cdot 1}{3\cdot 1+2}=\frac{3}{5}$.

7. იყო $\frac{x}{x+4}$, გახდა $\frac{x+11}{x+3}$. ეს წილადები ურთიერთშებრუნებულია, ე.ი. მათი ნამრავლია 1. მივიღეთ $\frac{x}{x+4}\cdot\frac{x+11}{x+4}=1 \Rightarrow x^2+11x=x^2+7x+12 \Rightarrow x=3$. თავდაპირველი წილადია $\frac{3}{x+4}=\frac{3}{7}$.

11.

	იყო	გახდა
I	x კგ	(x-10) კგ
II	2x კგ	(2x+10) კგ

5(x–10)=2x+10
5x–50=2x+10
3x=60; x=20.

I-ში იყო 60 კგ, II-ში კი 120 კგ.

12.

	იყო	გაიტანა	დარჩა
I	x ლარი	$\frac{x}{4}$ ლარი	$x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4}$ ლარი
II	ლარი	$\left(\frac{3x}{4} \cdot \frac{4}{9} + 64\right)$ ლარი	$\frac{3x}{4} - \left(\frac{x}{3} + 64\right)$ ლარი

რადგან დარჩენილი თანხა არის თავდაპირველის $\frac{3}{20}$ ნაწილი, მივიღეთ განტოლება:

$$\frac{3x}{4} - \left(\frac{x}{3} + 64\right) = \frac{3}{20}x$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{x}{3} - \frac{3x}{20} = 64$$

$$\frac{45x - 20x - 9x}{60} = 64$$

$$\frac{\cancel{16}x}{60} = \cancel{64}^{4}$$

x=240

13.

A→B	60 კმ/სთ	S კმ/სთ	$\frac{S}{60}$ სთ
B→A	80 კმ/სთ	S კმ/სთ	$\frac{S}{80}$ სთ

5 სთ და 50 წთ=$5\frac{50}{60}$სთ=$5\frac{5}{6}$სთ. მაშასადამე,

$$\frac{S}{60} + \frac{S}{80} = 5\frac{5}{6}$$

$$\frac{4S + 3S}{240} = \frac{35}{6}$$

$$\frac{\cancel{7}S}{{}_{40}\cancel{240}} = \frac{\cancel{35}^{5}}{\cancel{6}}$$

S=40·5=200კმ.

14. ვთქვათ უნდა დავუმატოთ x კგ. გვაქვს $\frac{12 \cdot 40\% + x \cdot 0\%}{x + 12} = 30\%$ (საშუალო არითმეტიკული)

$$\frac{{}^{4}\cancel{12} \cdot \cancel{40}^{4}}{x + 12} = 30 \Rightarrow x + 12 = 16 \Rightarrow x = 4.$$

15. $\dfrac{x \cdot 25\% + 3 \cdot 39\%}{x+3} = 30\%$

25x+117=31x+93;
6x=24, x=4.

16. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow \alpha=3x$ და $\beta=8x$. $\gamma=\dfrac{\alpha}{3} = x$.

3x+8x+x=180°
12x=180°
x=15°
$\alpha=45°$; $\beta=120°$; $\gamma=15°$.

17. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \alpha=4x$ და $\beta=5x$

$\alpha+\beta=180° \Rightarrow 9x=180° \Rightarrow x=20°$
$\alpha=80°$ და $\beta=100°$.

18. $AC=\dfrac{3}{4}MN \Rightarrow \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AC=3x$ და $MN=4x$. $AC+MN=14 \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2$.

19. $\overline{x1}+x=474 \Rightarrow 10x+1+x=474$.
11x=473, x=43.

ეს რიცხვებია 43 და 431.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისათვის:
$a(x+2)+b(x-1)=6x \Rightarrow (a+b)x+2a-b=6x \Rightarrow$

$\begin{cases} a+b=6 \\ 2a-b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=2a \\ 3a=6 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

8. წარმოვადგინოთ წილადი წილადების ჯამის სახით*

მათემატიკის მოყვარულთათვის:
ამოხსნები, მითითებები

3. $\dfrac{n-4}{n+2}=\dfrac{(n+2)-6}{n+2}=1-\dfrac{6}{n+2}$

ა. n+2=3; 6 n=1;4.
ბ. n+2=±1; ±2; ±3; ±6

4. $\dfrac{3n+4}{n-1}=\dfrac{(3n-3)+7}{n-1}=3+\dfrac{7}{n-1}$ n–1=1; 7.

5. ა. $\frac{n^2-8}{n-1}=\frac{(n^2-1)-7}{n-1}=n+1-\frac{7}{n-1}$ $n-1=\pm1; \pm7$

6. ა. $5x+y-xy=2 \Rightarrow (5-y)x=2-y \Rightarrow x=\frac{y-2}{y-5}=\frac{y-5+3}{y-5}=1-\frac{3}{y-5}$ $y-5=\pm3; \pm1.$

ბ. $x(y+2)=3y=5 \Rightarrow x=\frac{3y+5}{y+2}=\frac{3y+6-1}{y+2}=\frac{3(y+2)}{y+2}-\frac{1}{y+2}=3-\frac{1}{y+2}$ $y+2=\pm1.$

7. $\frac{n}{5}$ მთელია $\frac{9n}{15}=\frac{3n}{5}=3\cdot\frac{n}{5}$ მთელია.

8. $\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+...+\frac{1}{89\cdot90}=\frac{11-10}{10\cdot11}+\frac{12-11}{11\cdot12}+...+\frac{90-89}{89\cdot90}=\frac{1}{10}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\frac{1}{12}+...+\frac{1}{89}-\frac{1}{90}=\frac{1}{10}-\frac{1}{90}=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$

9. $\overline{xx}=10x+x=11x.$ $x\cdot\frac{11x}{99}=\frac{x^2}{9}$ ე.ი. x^2:9

$x=3; x=6; x=9$ დანარჩენი 3-ის ჯერადი x-ები არ ვარგა, რადგან x არის ციფრი.

10. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2b=ab \Rightarrow a=\frac{2b}{b-2}=\frac{2b-4+4}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$ $b-2=4; 2; 1.$

9. უტოლობა

ამოხსნები, მითითებები:

5. ყველა შემთხვევაში განვიხილოთ მარცხენა და მარჯვენა მხარეების სხვაობები.

მაგ.: ვ) $(m+n)^2-4mn=(m-n)^2\geq0$ რ.დ.გ.

6. $\frac{n}{m}$ წესიერია ნიშნავს, რომ $n<m$. განვიხილოთ $\frac{m}{n}-\frac{n+1}{m+1}=\frac{n-m}{m(m+1)}<0,$ რ.დ.გ.

18. **დ.** $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1>0$. ა, ბ, გ, ე და ვ შემთხვევებში პასუხს ვერ გავცემთ.

22.

დ. მიმ.	20 კმ/სთ	S კმ	$\frac{5}{20}$ სთ
დ. საწ.	16 კმ/სთ	S კმ	$\frac{5}{16}$ სთ

$\frac{5}{20}+\frac{5}{16}\leq3.$ $\frac{45+45}{80}\leq3.$ $\frac{95}{80}\leq3.$ $5\leq\frac{3\cdot80}{9}=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$

ტურისტებს შეუძლიათ ნავსადგურს დაშორდნენ არაუმეტეს $26\frac{2}{3}$ კმ-ით.

23. $x\geq\frac{30\cdot12}{50}=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}.$ სულ ცოტა 8 დღე.

24. $5<x<21$. უმცირესი მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას, არის 6.

25. $(x+6)^2-x^2=108$

$x^2+12x+36-x^2\geq 108$

$\cancel{1}2x\geq\cancel{7}2$

$x\geq 6$

26. ერთეულზე მოგებაა 5 ლარი. ვთქვათ აწარმოა x ერთეული, მაშინ $5x>500$. $x>100$.

27. $$\frac{8\cdot 60\% + 4\cdot x\%}{12}\leq 40\%$$

$$\frac{4(120+x)}{12}\leq 40$$

$120+x\leq 120$

$x\leq 0$.

ეს ნიშნავს, რომ უნდა შევურიოთ 0%-იანი ხსნარი.

28. $5000(x-50)-80000\geq 70000$

$5(x-50)-80\geq 70$

$5x-250\geq 70$

$5x\geq 400$

$x\geq 80$.

ე.ი. ფირმამ ერთი ფილა შოკოლადი უნდა გაყიდოს სულ მცირე 80 თეთრად.

29. $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$; $\quad\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$; $\quad\frac{c}{d}=\frac{3}{4}$.

$\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$; $\quad\frac{b}{c}=\frac{6}{9}$; $\quad\frac{c}{d}=\frac{9}{12}$.

$a:b:c:d=5:6:9:12$.

$a=5x$; $b=6x$; $c=9x$; $d=12x$.

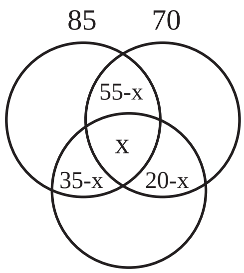
$32x=64$, $x=2$.

$a=10$; $b=12$; $c=18$; $d=24$.

30. თითო ასეთი მოქმედების დროს ნამატია 4. ვთქვათ, გაიხა x-ჯერ, მაშინ ნაკუწების რაოდენობაა $4x+5=1996\Rightarrow 4x=199$. რადგან x მივიღეთ არანატურალური, მაშასადამე შეუძლებელია.

31. სულ მცირე 55%-მა იცის ფრანგული და ინგლისური, 35%-მა ფრანგული და გერმანული, 20%-მა კი ინგლისური და გერმანული. ე.ი. 5%-მა სამივე ენა.

შეიძლება ეილერის წრეებითაც:



10. რიცხვითი უტოლობის თვისებები

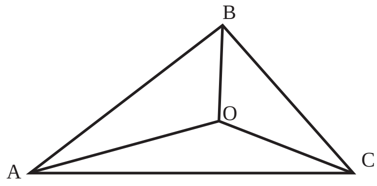
რეზიუმე:

პარაგრაფში ვეცნობით რიცხვითი უტოლობის თვისებებსა და მათ პრაქტიკულ გამოყენებას.

ამოხსნები, მითითებები:

4. განვიხილოთ სხვაობა $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$.

5. $0<a<1$ ცხადია, ნებისმიერი $n\in N$ $0<a^n<1$. განვიხილოთ სხვაობა $a^n-a=a(a^{n-1}-1)$, მაგრამ $a^{n-1}<1$ ე.ი. მოცემული სხვაობა უარყოფითია და $a^n<a$, რ.დ.გ.



6. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, $\begin{cases} OA+OB>AB \\ OB+OC>BC \\ OA+OC>AC \end{cases}$

შევკრიბოთ

$2OA+2OB+2OC>AB+BC+AC$, ე.ი. $OA+OB+OC>\frac{AB+BC+AC}{2}$.

9. $3<a<7$ **დ.** $24<2a+3b<44$

$6<b<10$ $5<2b-a<17$

14. $2<a<5$ $-3<b<-1$ $6<3a<15$ $2<-2b<6$

ა. $20<3a-2b+12<33$

15. განვიხილოთ სხვაობა

$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$

რ.დ.გ.

16. უ.დ. $a<\frac{a+b+c}{2}$

$a-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a-b-c}{2}=\frac{a-(b+c)}{2}<0$ (სამკ. უტოლობით).

25.

I	10%	x კგ
II	40%	x+3 კგ
ახალი	30%	2x+3 კგ

$\frac{10x+40(x+3)}{2x+3}=30$;

საიდანაც x=3; შენადნობის მასაა 2x+3=9

ტესტი:

1. დ; **2.** დ; **3.** დ; **4.** გ; **5.** დ; **6.** ა; **7.** გ; **8.** ა; **9.** გ; **10.** გ.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $2{,}7\cdot10^{6}$; გ) $7{,}8\cdot10^{-4}$; დ) $7{,}1\cdot10^{-6}$; ე) $3{,}45\cdot10^{7}$.

2. გ) $\frac{5{,}6\cdot10^{-4}\cdot8}{4\cdot10^{2}}=11{,}2\cdot10^{-6}=1{,}12\cdot10^{-5}$;

დ) $\frac{4\cdot10^{-3}(2\cdot10^{-1})^{2}\cdot5}{10^{-4}}=2^{2}\cdot10\cdot2^{2}\cdot10^{-2}\cdot5=\frac{2^{4}\cdot5}{10}=8.$

3. გ) $\frac{(-2^{3})^{-2}a^{-6}b^{6}}{(2^{2})^{-3}3^{-3}a^{6}b^{12}}=\frac{27}{a^{12}b^{6}}$ დ) $\frac{1}{2\cdot p^{-6}q^{3}\cdot2^{4}p^{20}\cdot q^{-8}}=\frac{q^{5}}{2^{3}p^{14}}$

ე) $\frac{(6(2-3x))^{-3}}{(-(2-3x))^{5}}=-\frac{1}{6^{3}(2-3x)^{8}}$ ვ) $1-x^{2}$; ზ) $\frac{(1-x^{2})^{-1}(1+x^{2})^{-1}}{(1+x^{2})^{-2}}=\frac{1+x^{2}}{(1-x^{2})}$

4. $1=4^{0}$; $4=4^{1}$; $64=4^{3}$; $\frac{1}{4}=4^{-1}$; $\frac{1}{16}=4^{-2}$; $\frac{1}{64}=4^{-3}$;

5. $a^{4}=(a^{2})^{2}$; $a^{8}=(a^{2})^{4}$; $a^{-6}=(a^{2})^{-3}$; $a^{-14}=(a^{2})^{-7}$; $a^{-28}=(a^{2})^{-14}$;

6. ა) $3^{2}\cdot\frac{1}{243}\cdot81^{2}\cdot3^{-3}=3^{2}\cdot3^{-5}\cdot3^{8}\cdot3^{-3}=9$; ბ) $\left(\left(\frac{1}{9}:\frac{4}{27}\right):\frac{16}{48}\right):\frac{81}{121}=\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{48}{16}\cdot\frac{121}{81}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^{2}$

7. ა) $4^{14}=2^{28}$, ე.ი. $2^{27}<4^{14}$; ბ) $9^{-18}=3^{-36}$, ე.ი. $3^{-37}<9^{-18}$;

გ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{29}=2^{-29}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{15}=2^{-30}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{15}<\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$.

8. ა) $25^{9}+5^{17}=5^{18}+5^{17}=6\cdot5^{17}\vdots30$; ბ) $12^{13}-12^{12}+12^{11}=12^{11}(12^{2}-12+1)=12^{11}\cdot133\vdots19$;

გ) $27^{10}-9^{14}=3^{30}-3^{28}=3^{28}\cdot8\vdots24.$; დ) $11^{9}-11^{8}+11^{7}=11^{7}(11^{2}-11+1)=11^{7}\cdot3\cdot37$;

ე) $172^{3}-85^{3}=(172-85)(172^{2}+172\cdot85+85^{2})=97(172^{2}+172\cdot85+85^{2})$;

ვ) $88^{3}+87^{3}=(88+87)(88^{2}-88\cdot87+87^{2})=175(88^{2}-88\cdot87+87^{2})$.

45. ბ. $\frac{\frac{a-b}{c}+3}{\frac{a+b}{c}+1}=\frac{\frac{a-b+3}{c}}{\frac{a+b+c}{c}}=\frac{a-b+3c}{c}\cdot\frac{c}{a+b+c}=\frac{a-b+3c}{a+b+c}.$

გ. $\frac{x-\frac{yz}{y-z}}{y-\frac{xz}{x-z}}=\frac{xy-xz-yz}{y-z}:\frac{x-z}{xy-yzxz}=\frac{x-z}{y-z}.$

დ. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}}=\frac{x+1}{2x+1}.$

55. ა. $ax>10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x>\frac{10}{a} \\ a>0 \end{array}\right) \Rightarrow a>0$

ბ. $ax<10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x>\frac{10}{a} \\ a<0 \end{array}\right) \Rightarrow a<0$

58. ა) $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$. რ.დ.გ.

ბ) $\frac{a^2}{a^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{a^2}{a^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2a^2}{2(a^2+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-1)^2}{2(a^2+1)} \geq 0$

გ) $a^2+6a+10 \geq 0 \Rightarrow a^2+6a+9+1 \geq 0 \Rightarrow (a+3)^2+1 \geq 0$. რ.დ.გ.

დ) $2a^2+4b^2+2a+4ab+7>0 \Rightarrow (a^2+4b^2+4ab)+(a^2+2a+1)+6>0 \Rightarrow (a+2b)^2+(a+1)^2+6>0$ რ.დ.გ.

59. $35 \leq \frac{5x+45}{8} \leq 40$

$280 \leq 5x+45 \leq 320$

$235 \leq 5x \leq 275$

$47 \leq x \leq 55$.

60. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $a<b+c$. უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ a. $2a<a+b+c$, საიდანაც $a<\frac{a+b+c}{2}$ რ.დ.გ (დანარჩენი ორი გვერდისთვის მტკიცება ანალოგიურია).

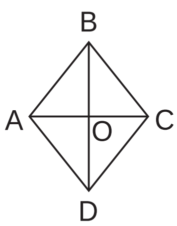
62. ა. $5 \leq x<8$
$10 \leq 2x<16$
$15 \leq 2x+5<21$

ბ. $5 \leq x<8$
$-8<-x \leq -5$
$-24<-3x \leq -15$
$-17<7-3x \leq -8$.

გ. $5 \leq x<8$
$25 \leq 5x<40$
$23 \leq 5x-2<38$

65. $BO+OC>BC$ (ΔBOC)
$CO+OD>CD$ (ΔCOD)
$OD+OA>AD$ (ΔAOD)
$BO+OA>AB$ (ΔAOB)

$2(d_1+d_2)>P_{ABCD} \Rightarrow d_1 d_2>\frac{P_{ABCD}}{2}$



$d_1<BC+CD$(ΔBCD)
$d_2<AB+AD$(ΔABD) $\Rightarrow d_1+d_2<P_{ABCD}$. რ.დ.გ

67. ბ) $2x-1 \geq 3a+5$

$2x \geq 3a+6$

$x=\frac{3a+6}{2}$

$x>0 \Rightarrow x=\frac{3a+6}{2}>0 \Rightarrow 3a+6>0 \Rightarrow a>-2.$ $\qquad$ $x<0 \Rightarrow a<-2.$

68. $7x-m=2m+1$

$7x=3m+1$

$x=\frac{3m+1}{7}$

ა. $x>3 \Rightarrow \frac{3m+1}{7}>3 \Rightarrow 3m+1>21 \Rightarrow m>\frac{20}{3}.$

ბ. $x<2 \Rightarrow \frac{3m+1}{7}<2 \Rightarrow 3m+1 \Rightarrow m<\frac{13}{3}.$

69. ა) $|5m-2|=2-5m \Rightarrow 5m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{2}{5};$

გ) $\frac{|7m+4|}{7m+4}=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}|7m+4|=7m+4\\ 7m+4 \neq 0\end{array}\right) \Rightarrow 7m+4>0 \Rightarrow 7m>-4;$

დ) $\frac{|4m-4m^2-1|}{4m^2+1-4m}=1 \Rightarrow 4m^2-4m+1>0 \Rightarrow (2m-1)^2>0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}.$

71.

ტივი	4 კმ/სთ	20 კმ	$\frac{20}{4}$სთ=5სთ
ნავი	(x+4) კმ/სთ	20 კმ	$\frac{20}{x+4}$სთ

$5-3=\frac{20}{x+4} \Rightarrow \frac{20}{x+4}=2 \Rightarrow 2x+8=20.$ $\quad x=6.$ $\quad x \geq 6$ კმ/სთ.

72. რადგან მანქანები მოძრაობენ შემხვედრი მიმართულებით, ამიტომ მანძილი იფარება სიჩქარეების ჯამით. თუ ავტომანქანის სიჩქარეს აღვნიშნავთ x კმ/სთ-ით, მაშინ მანქანებს შორის მანძილი იფარება 2x კმ/სთ-ით. ორ საათში დაიფარება 4x კმ-ით მანქანებს შორის მანძილი.

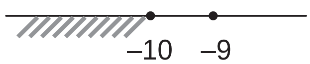
ე.ი. $\quad 4x \geq 250-2$

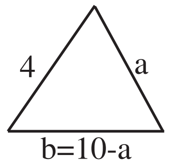
$4x \geq 248$

$x \geq 62 \quad x \leq 62{,}5.$

73. ა. $3(x-1)-4(x+8)-25>5x \Leftrightarrow 3x-3-4x-32-25>5x \Leftrightarrow 6x<-60 \Leftrightarrow x<-10$

პასუხი: -9



74. 

$6-a<14-a$
$6<2a<14$
$3<a<7$

ანალოგიურად, $3<b<7$, ე.ი. a და b-ს შესაძლო მნიშვნელობებია 4, 5, 6, ე.ი. დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეა 4 და 6 ან 5 და 5.

76.

დ.მ.	S კმ	4 სთ	$\frac{S}{4}$ კმ/სთ
დ.ს.	S კმ	5 სთ	$\frac{S}{5}$ კმ/სთ

$$\left.\begin{array}{l} V_{დ.მ.}=V_{ნ.}+V_{მ.დ.} \\ V_{დ.ს.}=V_{ნ.}+V_{მ.დ.} \end{array}\right) \Rightarrow V_{დ.მ.}-V_{დ.ს.}=V_{ნ}+V_{მდ.}-V_{ნ}+V_{მდ.}=2V_{მდ}.$$

$$\frac{S}{4}-\frac{S}{5}=2\cdot 2$$

$$\frac{5S-4S}{20}=4;\ \ S=80.$$

77.

დ.მ.	5 სთ	(x+2,4) კმ/სთ	5(x+2,4) კმ/სთ
დ.ს.	$6\frac{1}{4}$ სთ	(x–2,4) კმ/სთ	$\frac{25}{4}$(x–2,4) კმ/სთ

$5(x+2,4)=\frac{25}{4}(x-2,4)$
$4x+9,6=5x-12$
$x=21,6.$

78.

I	x კმ/სთ	$10\frac{2}{3}$ სთ	$\frac{32}{3}$x კმ
II	(x–10) კმ/სთ	$12\frac{4}{5}$ სთ	$\frac{64}{5}$(x–10) კმ

$$\frac{\cancel{32}}{3}x=\frac{\overset{2}{\cancel{64}}}{5}(x-10)$$

$5x=6(x-10)$
$5x=6x-60$
$x=60$

79.

	ავსებს			
I	x სთ	$\frac{1}{x}$ ნაწ/სთ	24 სთ	$\frac{24}{x}$ ნაწ.
II	y სთ	$\frac{1}{y}$ ნაწ/სთ	24 სთ	$\frac{24}{y}$ ნაწ.

$$\frac{24}{x}+\frac{24}{y}=1$$

I	$\frac{1}{x}$ ნაწ/სთ	8 სთ	$\frac{8}{x}$ ნაწ.
II	$\frac{1}{y}$ ნაწ/სთ	12 სთ	$\frac{12}{y}$ ნაწ.

$$\frac{8}{x}+\frac{12}{y}=\frac{2}{5}$$

$$\left.\begin{matrix}24y+24x=xy\\ 5(4y+6x)=xy\end{matrix}\right)\Rightarrow 24y+24x=20y+30x$$

$4y=6x \Rightarrow y=\frac{6x}{2}$. ე.ი. $\frac{8}{x}+\frac{\cancel{12}^{2}\cdot 4}{\cancel{6}x}=\frac{2}{5}$

$\frac{6x}{2}=\frac{2}{5} \Rightarrow x=40.$ მარტო I მილით გაივსება 40 საათში.

80. $(x+200)\frac{\cancel{8}}{100}=\cancel{40}^{5}$

$x+200=500$

$x=300$

81. $\frac{20\cdot 12+x\cdot 0}{20+x}=10 \Rightarrow x=4.$

82. გ. $8<2a+3<13$ $5<a+b<8$

$\frac{1}{8}<\frac{1}{a+b}<\frac{1}{5}$ $\Bigg| \Rightarrow 1<\frac{2a+3}{a+b}<\frac{13}{5}$

ტესტი თვითშემოწმებისთვის

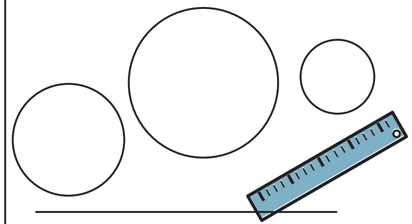
1. დ; **2.** ბ; **3.** ბ; **4.** გ; **5.** ბ; **6.** ბ; **7.** ა; **8.** ა; **9.** ა; **10.** ბ; **11.** გ; **12.** ა; **13.** 8 სთ.

IV თავი

მიმართულება: ალგებრა და კანონზომიერება			
კლასი: 8			
საათების სავარაუდო რაოდენობა – 4-6			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ირაციონალური რიცხვი.			
თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები: ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება მკვიდრი წარმოდგენები: • კანონზომიერებების ალმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში; • ორ რიცხვს შორის დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით. (ხელს უწყობს დამოკიდებულების უკეთ გააზრებასა და ანალიზს). • კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით; • მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.			
თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ფუნქცია, კვადრატული ფუნქცია			
სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები	საკითხი და ქვეცნებები	საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები	კომპლექსური დავალებები
კავშირები • ყოველთვის შესაძლებელია ორი რიცხვის შედარება, მიუხედავად მათი ბუნებისა. • ირაციონალური რიცხვებით გამოისახება ზოგიერთი ობიექტის ზომები.	• კვადრატული ფესვი; • მოქმედებები კვადრატული ფესვის შემცველი გამოსახულებებზე; • ირაციონალური რიცხვი; • რიცხვი π.	1. როგორი რიცხვები გაქვთ ნასწავლი? 2. შეიძლება თუ არა, რომ ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს ირაციონალური რიცხვი? 3. შეიძლება თუ არა, რომ ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს რაციონალური რიცხვი? 4 შეიძლება თუ არა, რომ რაციონალური და ირაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს რაციონალური რიცხვი?	**კომპლექსური ამოცანის პირობა:** ნამუშევარში წარმოაჩინეთ: • ჩვენს გარემომცველ სამყაროში მოიძებნება ფიგურები, რომელთა, ზომა ირაციონალური რიცხვით გამოისახება.. ეს რიცხვები შესაბამისად ახასიათებენ აღნიშნულ ფიგურას. **კომპლექსური დავალება** დახაზეთ სხვადასხვა რადიუსიანი წრეწირები. წრეწირებს შემოავლეთ ძაფი და გაზომეთ ამ ძაფის სიგრძე. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრის სიგრძესთან.
	კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)		
	ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **აქტივობა 1:** მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს დახაზონ წრეწირები, თითოეული წრეწირისათვის გაზომონ წრეწირის სიგრძე და რადიუსი. **საკვანძო შეკითხვა:** ა) არსებობს თუ არა წრეწირის სიგრძესა და რადიუსის სიგრძეებს შორის კავშირი? ბ) შესაძლებელია თუ არა წრეწირის სიგრძესა და რადიუსის სიგრძეებს შორის კავშირის დადგენა?		

<table>
<tr>
<td rowspan="5">• რიცხვებს შორის კანონზომიერებების აღმოჩენა და ამ კანონზომიერების მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პრო-ცესის აღწერაში, დასკვნების გამო-ტანასა და სამყაროს შესწავლაში;

ფორმა – რაიმე რიცხვის სხვადასხვა ფორმით წარმოდ-გენა;
• რიცხვთა დაყოფა შესაძლებელია არ-სებული კანონზომ-იერების მიხედვით.
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგე-ნილი იყოს ეკვივალ-ენტური ფორმებით;

მოდელი/ მოდელი-რება – შესაბამისი მოდელის შექმნა;
• მათემატიკური მოდელი გამოიყენება არსებული მიმართე-ბების ჩაწერისა და პროგნოზირებისა თვის.</td>
<td>ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთ-ვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• როგორი რიცხვები აქვთ ნასწავლი?
• შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი რიცხვების შეკრება-გამოკლება?
• შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი რიცხვების გამრავლება-გაყოფა?
• ყოველთვის შეძლებენ თუ ვერა მოცემული არითმეტიკული მოქმედების შედეგის პოვნას?</td>
<td rowspan="4">გამოთქვით ვარაუდი, თუ როგორ შეიძლება გამოისახოს წრეწირის სიგრძე მისი დიამეტრით.
პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ:
• წარმოადგინეთ კავშირები;
• აღწერეთ თქვენ მიერ ჩატარე-ბული სამუშაო;
• მოახდინეთ მოცემული სიტუა-ციის მათემატიკური მოდელირება.

იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე:
https://teacher.desmos.com/activity-builder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f
კომპლექსური დავალების შეს-რულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სა-მყაროს და მოვლენების კავშირე-ბზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალ-ისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესასრულებლად საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
აქტივობა 2:
მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას:
ა) თითოეული წრეწირისათვის იპოვეთ წრეწირის სიგრძის დიამეტრის სიგრძესთან შეფარდება. მიღებული შედეგები შეადარონ და გამოიტანონ დასკვნა;
ბ) გამოსახონ წრეწირის სიგრძე დიამეტრით.</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.
საკვანძო შეკითხვა: როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედე-გები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს?
აქტივობები:
მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანა-ტოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს.</td>
</tr>
<tr>
<td>კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები
(აქტივობები, რესურსები)
ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთ-ვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს:
ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.</td>
</tr>
<tr>
<td>რესურსები: მოსწავლის წიგნი თავი 4</td>
<td>შეფასების კრიტერიუმი:
განმავითარებელი შეფასება.</td>
</tr>
</table>

1. ფართობის თვისებები. კვადრატის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

1. $S=4^2=16$სმ^2. **2.** $S=36$სმ$^2=a^2$ $a=6$სმ. **3.** $S_{ABD}=S_{BDC}-3=2$. $S_{ABC}=7$სმ^2.

4. $S_{ABCD}=9$სმ$^2+6$სმ$^2=15$სმ^2. **5.** $S_{ABK}=2\cdot 6$სმ$^2=12$სმ^2. **6.** $S_{MNKD}< S_{ABC}=2$. ე.ი. $S_{MNKD}=1$.

7. პირველი და მესამე კვადრატების ფართობთა ჯამია 18სმ^2, ხოლო მეორე და მეოთხის კი 14სმ^2. ე.ი. წითლად დაშტრიხული ფიგურების ფართობი 18სმ^2–14სმ^2=4სმ^2–ით მეტია ცისფრად დაშტრიხული ფიგურის ფართობზე.

8. ა) $t=\frac{S}{V}$, ე.ი. t და V უკუპროპორციული სიდიდეებია;

ბ) $x=100-y$, სადაც x დარჩენილი ფურცლების რაოდენობაა, y კი ამოხეულის. x და y არც პირდაპირპროპორციულია, არც უკუპროპორციული;

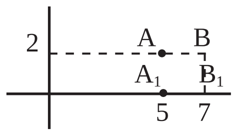
გ) უკუპროპორციულია; დ) არც ერთი.

9. მასშტაბია 1:300, ეს შეიძლება ასე განვიხილოთ: 300სმ, 1სმ, ე.ი. 3მ→1სმ, საიდანაც მივიღებთ 15მ→5სმ, ე.ი. ბილიკის სიგრძე ნახაზზე 5 სმ-ია.

10. ა) $AB=-5-(-11)=6$; ბ) $AB=|m-n|$.

11. რადგან A და B წერტილების y კოორდინატები ტოლია, ე.ი. AB მონაკვეთი პარალელურია x ღერძის და $AB=A_1B_1=2$.

ბ.



$AB=7-(-5)=12$.

12. ვთქვათ იყო x მანდარინის და y ფორთოხლის ხე. რადგან ერთი ხიდან საშუალოდ 300კგ მანდარინი დაიკრიფა, ე.ი. მანდარინი დაიკრიფა 300xკგ. ანალოგიურად, ფორთოხალი დაიკრიფა 800yკგ. საშუალოდ ერთი ხიდან მიიღეს 600კგ ხილი. ე.ი.

$800y+300x=600x+600y$, საიდანაც $y=\frac{3}{2}x$, მივიღებთ, რომ $\frac{x}{x+y}=\frac{2}{5}$, ე.ი. მანდარინის ხეების რაოდენობა ბაღში მდგომი ხეების 40%-ია.

2. მართკუთხედის, მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

1. ვთქვათ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a და b. ე.ი. $S=ab$, თუ გვერდების სიგრძეებს გავზრდით k-ჯერ, მაშინ $a_1=k\cdot a$ და $b_1=k\cdot b$. $S_1=a_1b_1=k_2ab=k^2\cdot S$. ე.ი. ფართობი გაიზრდება k^2-ჯერ. $(k>1)$.

2. $a:b=1:2 \rightarrow b=2a$. $S=ab=2a^2$ $2a^2=72$ $a^2=36$ $a=6$
$a=6$, $b=12$.

3. $S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 24=84$.

4. $a:b=9:40 \rightarrow a=9x$ და $b=40x$. $S=\frac{1}{2}ab=720$.

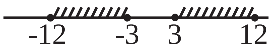
$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 9x\cdot \cancel{40}^{20}x=720 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$. $a=18$ სმ და $b=80$ სმ.

5. $S_1:S_2=9:16 \Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\frac{9}{2}$. $x=4{,}5$ სმ.

6. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ. კათეტები იქნება 4 სმ და 3 სმ, რადგან ჰიპოტენუზა უდიდესი გვერდია. ე.ი. $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$. $S=6$ სმ^2.

მითითება: სასურველია მოსწავლეებს ვუთხრათ, რომ 3,4,5 გვერდების მქონე მართკუთხა სამკუთხედს „პითაგორას სამკუთხედს“ უწოდებენ.

7. $S=2(2\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 5)=2\cdot 3=62$. $S_{სრ}=62$ სმ^2.

10. ა.  16 რიცხვი; ბ.  9 რიცხვი.

11. თეას სძინავს 8 სთ, რაც შეადგენს დღე-ღამის $\frac{1}{3}$-ს. ე.ი. დედამიწა შემობრუნდება სრული ბრუნის $\frac{1}{3}$ ნაწილით, ანუ 360°-ის $\frac{1}{3}$-ით, რაც 120°-ის ტოლია.

პიკის თეორემა
პიკის თეორემის თანახმად, იმ მრავალკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები მთელი კოორდინატებითაა მოცემული, ტოლია $\left(\frac{\Gamma}{2}+B-1\right)$-ის, სადაც

B – მრავალკუთხედის შიგნით მთელკოორდინატებიანი წერტილების რაოდენობაა.

Г – საზღვარზე მდებარე მთელკოორდიანტებიანი წერტილების რაოდენობაა.
ეს ფაქტი დაამტკიცა, ავსტრალიელმა მათემატიკოსმა, ჯორჯ პიკმა 1893 წელს.
ფიგურების ფართობი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა წინასწარ მოვამზადოთ კალკის ფურცელი კვადრატული ბადით.

3. რაციონალური რიცხვები

რეზიუმე:
მოსწავლემ უნდა შეძლოს ჩვეულებრივი წილადის ჩაწერა ათწილადის სახით. იცოდეს რომელი წილადი გადაიქცევა სასრულ და რომელი პერიოდულ ათწილადად. შეძლოს პერიოდული ათწილადის შემოკლებით ჩაწერა. ათწილადის (მათ შორის პერიოდულის) შედარება. ათწილადების დამრგვალება მოცემული სიზუსტით. მივუთითოთ, რომ ზოგჯერ ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით, ზოგჯერ მოსახერხებელია არა ზუსტი, არამედ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს რაციონალური რიცხვის განმარტება. უნდა შეეძლოს რაციონალური რიცხვის ჩაწერა, როგორც ჩვეულებრივი წილადის, ისე ათწილადის სახით. სასურველია, გაყოფის შესრულებამდე დაადგინოს რომელი წილადი გადაიქცევა სასრულ და რომელი –უსასრულო პერიოდულ ათწილადად. შეძლოს პერიოდული ათწილადების გადაქცევა ჩვეულებრივ წილადად, შეძლოს მოქმედებები რაციონალურ რიცხვებზე და საჭიროების შემთხვევაში გამოიყენოს მოქმედებათა თვისებები.

ამოხსნები, მითითებები:

1.

ა. $\frac{2}{3}$=2:3=0,666...0,(6);

ბ. $\frac{2}{5}$=0,4;

გ. $\frac{1}{11}$=1:11=0,(09);

დ. $\frac{2}{7}$=2:7=0,(285714);

ე. $\frac{2}{9}$=2:9=0,(2);

ვ. $\frac{2}{13}$=2:13=0,(153846).

2.

ა. $\frac{2}{15}$=0,1(3);

ბ. 0,8;

გ. 0,2(142857);

3.

ა. 0,(2)=$\frac{2}{9}$;

ბ. 3,(17)=$3\frac{17}{99}$;

4.

ა. 2,1(4)=$2\frac{14–1}{90}$=$2\frac{13}{90}$;

ბ. 3,17(5)=$3\frac{175–17}{900}$;

5.

ბ. 2,2(714258)=$2\frac{2714258–2}{9999990}$=$2\frac{2714256}{9999990}$.

6.

ა. $\frac{2}{7}$=0,(285714) პერიოდში არის 6 ციფრი.
199:6=33 (ნაშთი 1) რადგან ნაშთია 1, გვჭირდება მძიმის შემდეგ პირველი ციფრი ანუ 2.

ბ. $\frac{5}{6}$=5:6=0,8(3) ე.ი 199-ე ადგილზეც იქნება 3.

დ. $\frac{2}{11}$=0,(181) პერიოდში 3 ციფრია, 199-ის 3-ზე გაყოფის ნაშთია 1, ანუ გვესაჭიროება პერიოდის პირველი ციფრი, ე.ი იქნება 1.

4. კვადრატული ფესვი

ამოხსნები, მითითებები:

6. ა) 1,1; ბ) 0,3; გ) 0,14; დ) 0,4; ე) 0,6; ვ) $\frac{4}{5}$; ზ) $\frac{3}{7}$; თ) $\frac{1}{2}$; ი) $\frac{2}{3}$; კ) $\frac{7}{4}$.

7. ა) $\sqrt{10+3m} = \sqrt{10-9} = 1$.

8. ა) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$; ბ) $\sqrt{1\frac{15}{49}}=\sqrt{\frac{64}{49}}=\frac{8}{7}$.

9. ა) კი; ბ) არა; გ) არა.

12. ა) $x\geq 0$; ბ) $x\geq 3$; გ) $x\leq 0$; დ) $x\leq\frac{1}{3}$; დ) ნებისმიერი.

13. ა) $x=\pm 6$; ბ) $m=\pm 7$; გ) $a=\pm 1{,}5$; დ) $x=0$; ე) $x\in\varnothing$; ვ) $x=49$; ზ) $n\in\varnothing$; თ) $y=0$; ი) $x=26$; კ) $x=6$.

14. ა) $7<\sqrt{55}<8$; ბ) $9<\sqrt{98}<10$; გ) $25<\sqrt{635}<26$; დ) $36<\sqrt{1300}<37$.

15. $6a^2=96 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4$.

16. ა) $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$; ბ) $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.

17. $(x+6)^2=100 \Rightarrow x+6=\pm\sqrt{100}=\pm 10$. აქ საყურადღებოა ის, რომ ჩვენ უნდა შევარჩიოთ დადებითი პასუხი. $x+6=10$. $x=4$.

18. ა) $(x+5)^2=25 \Rightarrow x+5=\pm 5$. $x=0$ ან $x=-10$;
ბ) $(x-2)^2=16 \Rightarrow x-2=\pm 4$. $x=-2$ ან $x=6$;
ა) $(2x-1)^2=5 \Rightarrow 2x-1=\pm\sqrt{5}$. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;

19. ვთქვათ ფიგურების წიბოებია a, b და c, ე.ი. $a^3+b^3+c^3=216$ (a, b და c ნატურალურია). პასუხი უნდა მოიძებნოს შერჩევით. $1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$. ცხადია, a, b და c რიცხვებიდან თითოეული ნაკლებია 6-ზე. ე.ი. უნდა შეირჩეს 1 ,2 ,3 ,4 და 5 რიცხვებიდან. ესენია: 3; 4 და 5 (27+64+125=216).

20. $3a^3=192 \Rightarrow a^3=64 \Rightarrow a=4$.

25. ბ. $\sqrt{75}\in[8;9]$.

26. პირველ რიგში ვაჩვენოთ მოსწავლეებს, რომ 5**5 არის ორნიშნა რიცხვის კვადრატი, რადგან უმცირესი სამნიშნა არის 100 და 1002=10000, ხოლო უდიდესი ერთნიშნა არის 9 და $9^2=81$. $\overline{a5}^2$=5**5. $(10a+5)^2$=5**5 $\Rightarrow$ $100a^2+100a+25$=5 *5 $\Rightarrow$ $100(a^2+a)+25$=5**5, ე.ი. ბოლო ორი ციფრია 25 და a^2+a=5*, საიდანაც ადვილი სანახავია, რომ $a=7$. $7^2+7=56$. საძიებელი რიცხვია 5625.

27. 4კგ=4000გრ. 5% ტოლია $\frac{4000\cdot 5}{100}$=200 გრ. მერყეობს 3 კგ და 800 გრ-დან 4 კგ და 200 გრ-მდე.

28. $\alpha=\frac{\beta\cdot 20}{100} \Rightarrow \beta=5\alpha$. $\alpha+\beta=90° \Rightarrow \alpha=15°$, $\beta=75°$.

არტურ კომპტონი
x წელში იყო $\sqrt{x}$ წლის.
$\sqrt{1936}=44$. ე.ი $x=44$.
1936–9=1927.
1927 წელს ამერიკელი ფიზიკოსი არტურ ჰოლი კომპტონი გახდა ნობელის პრემიის ლაურეატი.

5. კვადრატული ფესვების გამრავლება და გაყოფა

ამოხსნები, მითითებები:

6. ა. $\sqrt{20}=\sqrt{4 \bullet 5}=2\sqrt{5}$;
ბ. $\sqrt{48}=\sqrt{16 \bullet 3}=4\sqrt{3}$;
გ. $\sqrt{80}=\sqrt{16 \bullet 5}=4\sqrt{5}$

7. დ. $a\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^3}=\sqrt{a^5}$; ი. $xy\sqrt{3xy}=\sqrt{x^2y^2}\cdot\sqrt{3xy}=\sqrt{3x^3y^3}$.

8. ა. $3\sqrt{11}-6=\sqrt{99}-6=\sqrt{99}-\sqrt{36}>0$ აქვს აზრი.
ბ. $5\sqrt{7}-6\sqrt{5}=\sqrt{25 \bullet 7}-\sqrt{36 \bullet 5}=\sqrt{175}-\sqrt{216}<0$ არა აქვს აზრი.

9. ა. $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$; $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$; $5\sqrt{2}>4\sqrt{3}$

10. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$
ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში
$2a+2\sqrt{a^2-b}=a+\cancel{\sqrt{b}}+2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}+a-\cancel{\sqrt{b}}$
$2a+2\sqrt{a^2-b}=2a+2\sqrt{a^2-b}$ რ.დ.გ

12. დ. $\sqrt{3x+5}=4$
$3x+5=16$;
$3x=11$
$x=\frac{11}{3}$
აქ სასურველია მივუთითოთ, რომ მიღებული პასუხი უნდა შემოწმდეს

13. გ) $S=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=6$.

14. $S=2\sqrt{3}=\frac{1}{2}a\cdot 3 \Rightarrow a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

15. $a^2=98$; $b^2=2$
$a^2:b^2=98:2=49$ ე.ი $a:b=7:1$
პასუხი: 7 ჯერ მეტია.

16. ა. $x^2+6x+3=x^2+2\cdot 3\cdot x+9-9+3=(x+3)^2-6$; ბ. $x^2+8x+21=x^2+2\cdot 4\cdot x+16+5=(x+4)^2+5$.

18. ა. $81a^2+6bc-9b^2-c^2=81a^2-(c-3b)^2=(9a-c+3b)(9a+c+3b)$

19. $720=5x+4x+3 \Rightarrow x=60 \Rightarrow 3x=180$

20. $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\geq 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2}{\sqrt{ab}}\geq 2 \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\geq 0$ რ.დ.გ.

6. კვადრატული ფესვი ხარისხიდან

რეზიუმე:

ყურადღება გამახვილდეს, რომ მოსწავლეს კარგად ესმოდეს განსხვავება. მას უნდა შეეძლოს ხარისხიდან კვადრატული ფესვის ამოღება, მოდულის ნიშნის სწორად გამოყენება და მისი მოხსნა.

ამოხსნები, მითითებები:

5. გ. $\sqrt{3\cdot 3^3}=9$; დ. $\sqrt{4\cdot 5^6}=2\cdot5^3=250$; ვ. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$;

ზ. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1$; თ. $\sqrt{(a-3)^2}=a-3$, თუ $a\geq5$;

ი. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2$.

12. გ) $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=0$;

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0 \qquad x\in\varnothing$.

ვ) $y^2-\frac{11}{2}y-3=0$

$y^2-2\cdot\frac{11}{4}y+\frac{121}{16}-\frac{169}{16}=0 \quad \left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{169}{16}$ $\qquad \left[\begin{array}{l} y=6 \\ y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

14. ა) $x\geq0$; ბ) $x\leq0$; გ) $x, y\in R$; დ) $x\in R$; ე) $x\in R$; ვ) $x\in R$.

16. ა) $-\sqrt{18}$; გ) $a^3\geq0 \Rightarrow a\geq0 \Rightarrow a\sqrt{a^3}=\sqrt{a^5}$;

დ) $a^3b\geq0 \Rightarrow ab\geq0.\ ab\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^5b^3}$; ე) $\sqrt{3b^3}$, რადგან $b\geq0$;

ზ) $\sqrt{b^3x^2}$, რადგან $bx^2\geq0 \Rightarrow b\geq0$. ი) $a<0 \Rightarrow a-2$, ე.ი. $-\sqrt{5ab(a-2)^2}$;

კ) $0\leq x<1{,}5 \Rightarrow 0\leq2x\leq3 \Rightarrow -3<-2x\leq0 \Rightarrow 0<3-2x\leq3$, ე.ი. $-\sqrt{2x(2x-3)^2}$.

17. გ) $\sqrt{x^5y^8}=|x^2y^4|\sqrt{x}=x^2y^4\sqrt{x}$;

დ) $\sqrt{-x^7y^2}=|x^3||y|\sqrt{-x}=-x^3y\sqrt{-x}$, გ.ა. $-x^7y^2\geq0 \Rightarrow a\leq0$.

ვ) $\sqrt{-4a^{11}b^6}=2|a^5||b^3|\sqrt{-a}=-2a^5|b^3|\sqrt{-a}$, გ.ა. $-a\geq0 \Rightarrow a\leq0$.

ზ) $\sqrt{x^7y^5}=|x^3||y^2|\sqrt{xy}=|x|^3y^2\sqrt{xy}$, გ.ა. $xy\geq0$.

19. $a\geq0$ და $b\geq0$; ბ) $a\leq0$ და $b\leq0$; გ) $a\geq0$ და $b\leq0$; დ) $a\leq0$ და $b<0$.

20. ა) $\left[\frac{7}{3};\infty\right)$; ბ) $[0;\infty)$; გ) $(-\infty;0]$; დ) 0; ე) R; ვ) Ø; ზ) $[0;\infty)$;

თ) $[0;\infty)$; ი) 0; კ) R.

21. $\sqrt{24}+\sqrt{47}$ (>; < ან =) 12 ავიყვანოთ ორივე მხარე კვადრატში.

$24+2\sqrt{24 \bullet 47}+47$ (>; < ან =) 144 ⇒ $71+4\sqrt{282}$ (>; < ან =) 144 ⇒ $4\sqrt{282}$ (>; < ან =) 73 ⇒

$\sqrt{282}$ (>; < ან =) 18,25 ⇒ $\sqrt{282}$ (>; < ან =) $\sqrt{342,25}$

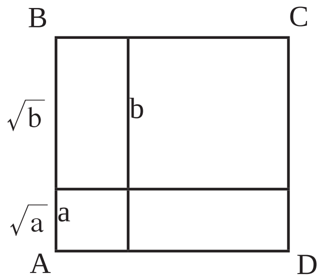
ე.ი $12>\sqrt{24}+\sqrt{47}$

7. კვადრატული ფესვების შემცველი გამოსახულებების გარდაქმნა

რეზიუმე:

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული პრობლემის გადაწყვეტა:

1.



$\sqrt{a}$ არის წითელი კვადრატის გვერდი. $\sqrt{b}$ — ცისფერი კვადრატის გვერდი. $\sqrt{a+b}$ არის ისეთი კვადრატის გვერდი, რომლის ფართობიც ტოლია წითელი და ცისფერი კვადრატების ფართობების ჯამის. $a+b<S_{ABCD}$. ე.ი. $\sqrt{a+b}<AB=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2. $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$ □ $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$, რ.დ.გ.

ამოხსნები, მითითებები:

10. ა) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}+\frac{1}{11+2\sqrt{30}}=\frac{11+\cancel{2\sqrt{30}}+11-\cancel{2\sqrt{30}}}{(11-2\sqrt{30})(11+2\sqrt{30})}=\frac{22}{121-120}=22$;

ბ) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{5}+3}{5-3}=\frac{16}{2}=8.$

11. ა) AD=2CD ⇒ $x=2\cdot 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

$P_{ABCD}=2\cdot x+2\cdot CD=2\cdot 4\sqrt{5}+2\cdot 2\sqrt{5}=8\sqrt{5}+4\sqrt{5}=12\sqrt{5}$.

12. ა) $\frac{3}{(3\sqrt{5}-6)}+\frac{3}{(3\sqrt{5}-6)}=\frac{3(3\sqrt{5}+6+3\sqrt{5}-6)}{(3\sqrt{5}-6)(3\sqrt{5}+6)}=\frac{18\sqrt{5}}{45-36}=2\sqrt{5}$.

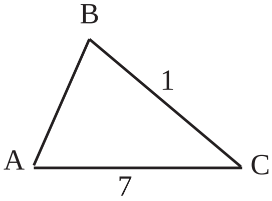
ბ) $\frac{2}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{2}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

13. $d_1^2=a^2+b^2$. $d^2=c^2+d_1^2=c^2+a^2+b^2$. $d^2=4+1+36 \Rightarrow d=\sqrt{41}$.

14. უდიდესი ორნიშნა რიცხვია 99. 99:6=16(3) ე.ი. 100-ის 6-ზე გაყოფის ნაშთია 4, უდიდესი ორნიშნა რიცხვი, რომლის 6-ზე გაყოფის ნაშთია 4, იქნება 100-6=94.

15. $\frac{x+y+36}{3}=12 \Rightarrow x+y+36=36 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \frac{x+y}{2}=0$.

16.



AB=x. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად:
$AC-BC<AB<AC+BC \Rightarrow 6<x<8$, რადგან x მთელია. x=7 სმ.

17. $\left.\begin{array}{l} 3^1 \to \ \ 3 \\ 3^2 \to \ \ 9 \\ 3^3 \to ...7 \\ 3^4 \to ...1 \\ 3^5 \to ...3 \end{array}\right\}$ რადგან ყოველი ოთხის მერე მეორდება და 35:4=8(3), ნაშთია 3, ე.ი. დაბოლოვდება ისევე, როგორც 3^3 ბოლო ციფრია 7.

ბ) 2^{18} ხარისხის ბოლო ციფრი რომ ვიპოვოთ, განვიხილოთ 2-ის ხარისხები.

მეორდება 4 ეტაპის შემდეგ 18:4=4(2). ნაშთის შესაბამისი მეორე ხარისხია, რადგან $2^2 \to 4$. ბოლო ციფრი იქნება 4.

გ) 222^{18} (ბ) შემთხვევის ანალოგიურად ბოლო ციფრია 4.

დ) ყოველი ოთხის მერე ბოლო ციფრი მეორდება 50:4=12(2), ნაშთია 2, ე.ი. გვაინტერესებს $7^3 \to ...9$, მაშასადამე, 7^{50}-ის ბოლო ციფრია 9.

18. მანძილი დედამიწიდან მზემდე არის $1{,}5\cdot10^8$. მზიდან პლუტონამდე იქნება $40\cdot1{,}5\cdot10^8=60\cdot10^8=6\cdot10^9$ (კმ).

19. სამივე შემთხვევაში ციფრები გვაქვს 0; 1; 3; 5; 7 და 9. მათი რაოდენობაა 6. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ორი უჯრა და თითოში უნდა ჩავწეროთ თითო ციფრი. ა) შემთხვევაში I-ში შეიძლება ნებისმიერი ციფრის ჩაწერა, ასევე II-შიც. ე.ი. სულ 6x6=36 ვარიანტი; ბ) შემთხვევაში I-ში 0-ს ვერ ჩავწერთ , რადგან მიღებული რიცხვი იქნება ერთნიშნა (მაგ. 05 ერთნიშნაა). ე.ი. პირველ ადგილას გვაქვს 5 არჩევანი. მეორეში კი 6. ვარიანტის რაოდენობაა $5\cdot6=30$. გ) შემთხვევაში წინა შემთხვევებისგან განსხვავებით, ციფრებს ვერ გავიმეორებთ, ამავე დროს, {0;1} და {1;0} სიმრავლეები ერთი და იგივეა, ე.ი. ქვესიმრავლეების რაოდენობა იქნება $\frac{6\cdot5}{2}=15$.

ტესტი:
1. გ; **2.** ბ; **3.** გ; **4.** ა; **5.** გ; **6.** ბ; **7.** ბ; **8.** ბ; **9.** გ; **10.** გ.

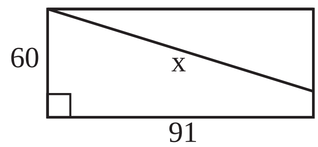
8. პითაგორას თეორემა

ამოხსნები, მითითებები:

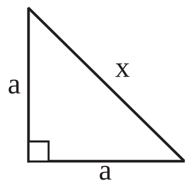
1. ა) $c^2=3^2+4^2 \Rightarrow c=5$;   ბ) $c^2=20^2+21^2=400+441=841 \Rightarrow c=29$.

2. ა) $b=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{(13-5)(13+5)}=\sqrt{8\cdot 18}=4\cdot 3=12$;

ბ) $b=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{9\cdot 25}=3\cdot 5=15$.

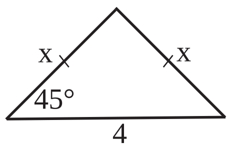
3. 

$x=\sqrt{91^2+60^2}=\sqrt{8281+3600}=\sqrt{11881}=109$

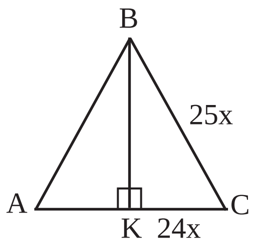
4. 

$x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

5. $x^2+x^2=a^2 \Rightarrow 2x^2=a^2$ $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

6. 

ცხადია, სამკუთხედი მართკუთხაა $2x^2=16 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$.

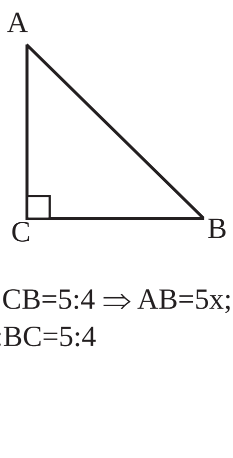
7. 

$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{48}{25} \Rightarrow \dfrac{AK}{BC}=\dfrac{24}{25}$

$BK^2=(25x)^2-(24x)^2=49x\cdot x=49x^2$.

$BK=7x=35 \Rightarrow x=5$.

8. ა) $AB=\sqrt{(-2-1)^2+(2-7)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

9. ა) 

$AC:CB=3:4 \Rightarrow AC=3x;\ BC=4x$.

$AB=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=5x$, ე.ი. $AC:AB=3:5$.

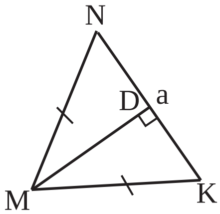
ბ) $AB:CB=5:4 \Rightarrow AB=5x;\ BC=4x.\ AC=\sqrt{(5x)^2-(4x)^2}=\sqrt{9x^2}=3x$, $AC:BC=3:4$.

გ) $AB:BC=5:4$

10. ა. $\sqrt{5}\in(2;3)$

ბ. $\sqrt{11}\in(3;4)$

11.



$MD^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$

$MD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

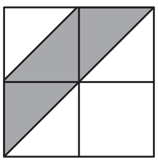
12. ა) $3^2+4^2=5^2$; ბ) $(3x)^2+(4x)^2=(5x)^2$.
აქ ყურადღება გავამახვილოთ, რომ პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა სამართლიანია, მაგრამ ჯერ ვერ ვამტკიცებთ.

13. $x^4-4x+2x^2+1=0$. უარყოფითი ფესვი ვერ ექნება, რადგან მარცხენა მხარე მკაცრად დადებითი იქნება. ლუწი ფესვის შემოწმებას აზრი არა აქვს, $x^4-4x^3+2x^2$ იქნება ლუწი და არ დააკმაყოფილებს. ე.ი. უნდა შევამოწმოთ მხოლოდ 1. $1^4-4\cdot1^3+2\cdot1^2+1=1-4+2+1=0$. x=1 განტოლების ფესვია.

14. $\cancel{2}5\cancel{4}$522347 დარჩა 5522347.

16. 4 მუშა შეასრულებს ორჯერ მეტ დროში. ე.ი.12 დღეში. 12 მუშა კი სამჯერ უფრო სწრაფად შეასრულებს სამუშაოს, ვიდრე 4 მუშა. ე.ი. 12:3=4. შეიძლება ასე: ერთი მუშა ერთ დღეში მთელი სამუშაოს $\frac{1}{6\cdot8}=\frac{1}{48}$ ნაწ.12 მუშა ერთ დღეში – $\frac{12}{48}$ ნაწ. ე.ი. საჭიროა 4 დღე.

18.



3 პატარა კვადრატში გამუქებულია პატარა კვადრატების ნახევარი პატარა კვადრატის ფართობი ≡2x. ე.ი დიდი კვადრატის ფართობია 8x, გამუქებულია 3x, ანუ $\frac{3}{8}$ ნაწილი.

9. ორმაგი რადიკალების გარდაქმნა*

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული პრობლემის გადაჭრა

1. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot1+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$ ჭ

2. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა. $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7+2\bullet\sqrt{7}\bullet2+4}=\sqrt{\sqrt{7}^2+2\bullet\sqrt{7}\bullet2+2^2}=\sqrt{(\sqrt{7}+2)^2}=\sqrt{7}+2$

ბ. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\sqrt{5}^2-2\bullet\sqrt{5}\bullet2+2^2}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

გ. $\sqrt{23-8\sqrt{7}}=\sqrt{7-2\bullet\sqrt{7}\bullet4+16}=\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2}=|\sqrt{7}-4|=4-\sqrt{7}$

2. ა. $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}=\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}\cdot 3+9}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{5}=|\sqrt{5}-3|+\sqrt{5}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}=3$

ბ. $\sqrt{17+6\sqrt{8}}-2\sqrt{2}=\sqrt{9+2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+8}-2\sqrt{2}=\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}-2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3$

3. ა. $\sqrt{11+\sqrt{85}}-\sqrt{11-\sqrt{85}}\equiv x \Rightarrow x^2=11+\cancel{\sqrt{85}}-2\sqrt{11^2-\sqrt{85}^2}+11-\cancel{\sqrt{85}}$

$x^2=22-2\sqrt{121-85}=22-2\sqrt{36}=22-12 \Rightarrow x^2=10 \quad x=\pm\sqrt{10}$, მაგრამ $x>0$, ე.ი $x=\sqrt{10}$

I გზა:

თითოეული რადიკალის გასამარტივებლად გამოვიყენოთ ორმაგი რადიკალის ფორმულა

ბ. $\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\equiv A$

$$\sqrt{8+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{8^2-15}}{2}}+\sqrt{\frac{8-\sqrt{8^2-15}}{2}}=\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ანალოგიურად: $\sqrt{8-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$A=\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{15}{2}}=\sqrt{30}$

შეგიძლიათ ამოხსნათ ზემოთ განხილული I გზით.

გ. $\sqrt{6+\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}\sqrt{3^2-\sqrt{3+\sqrt{5}}^2}=\sqrt{6+\sqrt{5}}\sqrt{9-3-\sqrt{5}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}\sqrt{6-\sqrt{5}}=\sqrt{36-5}=\sqrt{31}$

დ. $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{8-2\cdot 2\sqrt{2}+1}+\sqrt{9-2\cdot 2\cdot 3\sqrt{2}+8}=\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=$

$=|2\sqrt{2}-1|+|3-2\sqrt{2}|=2\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}=2$

II გზა:

დ. 1. $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$

$a^2+b^2=9$

$ab=2\sqrt{2}$

a	b	a^2+b^2	
2	$\sqrt{2}$	4+2	–
1	$2\sqrt{2}$	1+8=9	+

$\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}=2\sqrt{2}-1$

დ. 1. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$a^2+b^2=17$

$ab=6\sqrt{2}$

a	b	a^2+b^2	
3	$2\sqrt{2}$	9+8=17	+

$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=3-2\sqrt{2}$

$A=2\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}=2$

4. $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}\cdot 1+1}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}=\sqrt{a-1}+1$

10. საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის ცნებები, უნდა იცოდეს დამოკიდებულება მათ შორის და უნდა შეეძლოს მისი დამტკიცება, უნდა შეეძლოს აღნიშნული უტოლობების გამოყენება სხვა უტოლობების დამტკიცების დროს.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ა) $a+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{ab}$;

ბ) $1+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}$; $1+\frac{y}{z}\geq 2\sqrt{\frac{y}{z}}$; $1+\frac{z}{x}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}}$; გადავამრავლოთ.

გ) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2\geq 2$;

დ) $a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}(2a^2+2ab+2b^2)=\frac{1}{2}((a+b)^2+a^2+b^2)\geq 0$; ე) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+2\geq 2$;

ზ) $a^2+b^2+c^2=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}+ab+ac+bc\geq ab+ac+bc$;

თ) $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(m+n)=\frac{1}{2}(a+m)+\frac{1}{2}(b+n)\geq\sqrt{(a+m)(b+n)}$.

4. ა. $a+2\geq 2\sqrt{2a}$ $b+2\geq\sqrt{2b}$ $a+b\geq\sqrt{2ab}$ გადავამრავლოთ.

ბ. $1+a\geq 2\sqrt{a}$ $1+b\geq 2\sqrt{b}$ $1+c\geq 2\sqrt{c}$. $(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8\sqrt{abc}=8$.

5. მთელი მანძილი აღვნიშნოთ S-ით. $V=\frac{2S}{\frac{S}{40}-\frac{S}{60}}=48$ კმ/სთ.

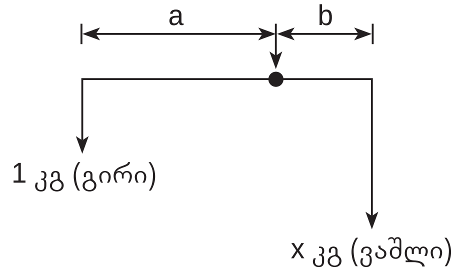
6. $\frac{25\cdot 35+30\cdot 40}{55}\approx 37{,}7$.

7. $\begin{cases}\frac{40x+60y}{x+y+5}=20\\ \frac{40x+60y+5\cdot 80}{x+y+5}=70\end{cases}$ $\begin{array}{l}x=1\\ y=2\end{array}$

8. I — x; II — y

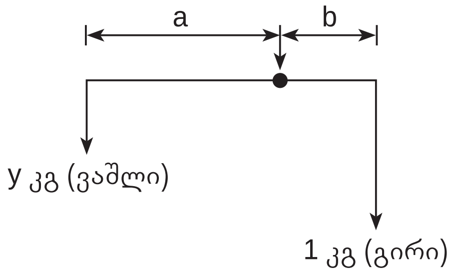
$\begin{cases}\frac{2x+5y+1}{8}=\frac{3}{8}\\ \frac{4x+15y+3}{22}=\frac{4}{11}\end{cases}$ $\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{5}\end{array}$

9.



პირველი აწონვა: ფიზიკის კურსიდან იცით, რომ

$a \cdot 1 = x \cdot b$, აქედან $x=\frac{a}{b}$



მეორე აწონვა: ძალების წონასწორობის პრინციპი-

დან: $ay=b \cdot 1$, $y=\frac{b}{a}$

ნინიმ სულ იყიდა $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$კგ ვაშლი. საშუალო არითმე-

ტიკულსა და გეომეტრიულს შორის დამოკიდებ

ულებიდან გვაქვს: $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}$

აქედან $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

თუ $a \neq b$, წაგებული რჩება გამყიდველი.

10. ა) 12 (5 2 7 8)+24+8 8
ბ) 12 (5 2 7 8)-36+4 4

11. 0-ს ბოლოში გვაძლევს 5-ისა და ნებისმიერი ლუწი რიცხვის ნამრავლი. ვიპოვოთ 5-იანების რაოდენობა. 1-დან 100-მდე არის 20 5-ის ჯერადი რიცხვი, მათ შორის 4 ცალი 25-ის ჯერადი, ე.ი. სულ 24 5-იანი. დაგვრჩა ცამეტი 5-იანი. ავითვალოთ ათეულებით: 101$\overset{4}{-}$120 (101-დან 120-მდე 4 ხუთიანია) 121$\overset{4}{-}$130, 131$\overset{2}{-}$140, 141$\overset{3}{-}$150, ე.ი. 37 ნული გვექნება 150, 151, 152, 153, 154 რიცხვებისათვის.

14. ვთქვათ, შემოსავალი 11250 ლარს გადააჭარბებს 0,1n ლარის დაკლებით, მაშინ ასეთ შემთხვევაში გაიყიდება 1000+20n დეტალი მივიღებთ:

$(1000+20n)(10-0,1n)=11250$
$n^2-50n+625=0$
$(n-25)^2=0$
$n=25$

ფირმა გაყიდდა 1000+20*25=1500 დეტალს.

12. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა

ამოხსნები, მითითებები:

15. ვთქვათ გამოვიყენე x ცალი პატარა კუბი. მიღებული კუბის მოცულობა იქნება x, რაც უნდა იყოს ნატურალური რიცხვის კუბი; მათ შორის უდიდესი შესაძლო რიცხვია 27.

16. ვთქვათ პარიზის დრო თბილისისას x სთ-ით ჩამორჩება, ხოლო თბილისსა და პარიზს შორის მანძილს თვითმფრინავი y საათში გაივლის, მაშინ თბილისიდან გაფრენილი თვითმფრინავი პარიზში იქნება (12–x+y) საათში (როცა თბილისში 12 საათია, პარიზში იქნება (12–x) სთ).

$$12-x+y=14 \quad (1)$$

ხოლო პარიზიდან თბილისში ჩამოფრინდებოდა (როცა პარიზში 17 საათია, თბილისში იქნება (17+x) სთ).

$$17+x+y=25 \quad (2)$$

ღამის 1 სთ იგივეა, რაც წინა დღის 25 სთ.

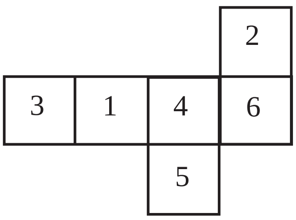
(1) დან $y-x=2$
(2) დან $y+x=8$ ე.ი $y=5$

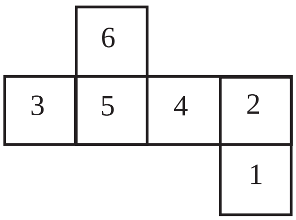
$2y=10$

თვითმფრინავი მგზავრობას ანდომებს 5 სთ-ს.

13. სივრცული ფიგურების შლილები

6.





IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. ა) ჭ; ბ) მც; გ) მც; დ) ჭ; ე) მც; ვ) ჭ.

8. ა) $x \le \frac{7}{3}$; ბ) $x=0$; გ) $2|x|+3\neq 0$, ე.ი. $x \ge \frac{1}{8}$; დ) $x\neq\pm 2$; ე) $x<0{,}6$;

ვ) $x\in R$; ზ) $8x^2+24x+18=2(4x^2+12x+9)=2[(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2]=2(2x+3)^2$, ე.ი. $x\in R$.

10. $RP=2-\sqrt{2}$; $PQ=3\sqrt{2}-2$; $RM=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; $RQ=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

11. ა) $(\sqrt{27}+\sqrt{3})\sqrt{3}=(\sqrt{9}\sqrt{3}+\sqrt{3})\sqrt{3}=(3+1)\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=12$.

დ) $(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2=[\sqrt{5}(1+\sqrt{2})]^2=5(1+2\sqrt{2}+2)=15+10\sqrt{2}$;

ვ) $(7\sqrt{3}+3\sqrt{7})(7\sqrt{3}-3\sqrt{7})=(7\sqrt{3})^2-(3\sqrt{7})^2=7^2\cdot 3-3^2\cdot 7=3\cdot 7(7-3)=84$.

12. ა) $(2x\sqrt{a}+y\sqrt{a}):\sqrt{a}=2x+y$; ვ) $(m+\sqrt{n})(n-m\sqrt{n}+n^2)=m^3+\sqrt{n}^3$;

ი) $(3p\sqrt{q}-3q\sqrt{p})^2=[3\sqrt{p}\cdot\sqrt{q}(\sqrt{p}-\sqrt{q})]^2=9pq(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$.

13. ა) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}=\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=2-\sqrt{2}$;

გ) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{9+2\cdot 3\sqrt{7}+7}=\sqrt{(3=\sqrt{7})^2}=3+\sqrt{7}$.

15. ა) $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$; $7=\sqrt{49}$, ე.ი. $5\sqrt{2}>7$;

ე) $3\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 18}=\sqrt{162}$; $2\sqrt{72}=\sqrt{4\cdot 72}=\sqrt{288}$, ე.ი. $2\sqrt{72}>3\sqrt{18}$.

16. ა) $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{45}}{\sqrt{42}-\sqrt{54}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-3)}{\sqrt{6}(\sqrt{7}-3)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$;

დ) $\frac{2x-\sqrt{24ax}+3a}{2x-3a}=\frac{\sqrt{2x}^2-2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3a}+\sqrt{3a}^2}{\sqrt{2x}^2-\sqrt{3a}^2}=\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt{3a})^2}{(\sqrt{2x}+\sqrt{3a})(\sqrt{2x}-\sqrt{3a})}=\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3a}}{\sqrt{2x}+\sqrt{3a}}$.

ვ) $\frac{x^3-2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{x^3-\sqrt{2}^3}{x-\sqrt{2}}=\frac{\cancel{(x-\sqrt{2})}(x^2+x\sqrt{2}+2)}{\cancel{x-\sqrt{2}}}=x^2+x\sqrt{2}+2$.

17. ა) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$; გ) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{5\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{5\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{5}$;

დ) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

18. ა) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{3(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\frac{15(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}\right)\cdot\frac{1}{(\sqrt{3}+5)}=$

$=(\sqrt{3}+1)-3\sqrt{3}-6+\frac{\cancel{15}(3+\sqrt{3})}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}-5\right)=\frac{15+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-10}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=$

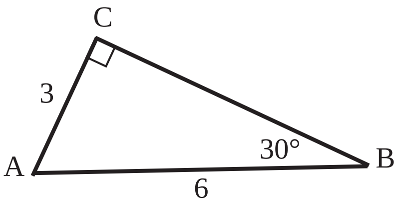
$=\frac{5+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\frac{1}{2}$

ბ) $7-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)=7-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{7+\cancel{4\sqrt{3}}+7-\cancel{4\sqrt{3}}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{14}^{2}}{49-48}=$
$=7-\cancel{2\sqrt{3}}+\cancel{2\sqrt{3}}=7$;

გ) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(4-\sqrt{15})}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{8+2\sqrt{15}}=$
$=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=2$;

დ) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}+5}{2}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}-$
$-\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}+\frac{\sqrt{5}+5}{2}=\frac{5-\cancel{2\sqrt{15}}+3+5+\cancel{2\sqrt{15}}+3}{5-2}-$
$-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1}+\frac{\sqrt{5}+5}{2}=\frac{16}{2}-\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}+5}{2}=8+\frac{\sqrt{5}+5}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=$
$=8+\frac{\cancel{\sqrt{5}}+5-3-\cancel{\sqrt{5}}}{2}=8+1=9.$

19.



$\left.\begin{array}{l}AB=6\\ \angle B=30^\circ\end{array}\right)\Rightarrow AC=6:2=3$

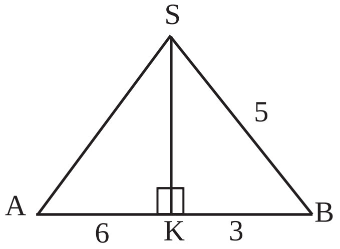
$CB^2=6^2-3^2\Rightarrow CB=3\sqrt{3}$.

$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

20. AB=$\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$ AC=$\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

AB=$\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ A და C წერტილებს შორის მანძილი უმცირესია.

21. $\Delta ACB=\Delta ASC=\Delta BSC$ სრული ზედაპირის ფართობია $S_{\Delta ABC}+3S_{\Delta ASB}=\frac{36\sqrt{3}}{4}+3S_{\Delta ASB}$.



KB=3 SK=4 $\Rightarrow S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12.$

$\frac{6^2\sqrt{3}}{4}+3S_{\Delta ASB}=9\sqrt{3}+36.$

33. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})=((1+\sqrt{3})^2-2)(1-\sqrt{3})^2-2)=$
$=(2+2\sqrt{3})(2-2\sqrt{3})=4-12=-8.$

34. $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$

38. ა) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{9-6\sqrt{5}+5}+\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}=6;$

ბ) ცხადია $\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}>0$ განვიხილოთ მისი კვადრატი

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}})^2=11+4\sqrt{7}-2\sqrt{121-16\cdot 7}+11-4\sqrt{7}=22-18=4$, ე.ი.

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}=2.$

39. $\sqrt{5-m}+\sqrt{3+m}=3$ ავიყვანოთ კვადრატში

$5-m+2\sqrt{(5-m)(3+m)}+3+m=9$ $\sqrt{(5-m)(3+m)}=1$.

44. ბ) $\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{2}{2(1-a)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{1+a+a^2-a^2-2}{1-a^3}=-\frac{1}{1+a+a^2}$.

47. ა) $m+2\geq 2\sqrt{2m}$; $n+2\geq 2\sqrt{2n}$; $mn+1\geq 2\sqrt{mn}$, ე.ი. $(m+2)(n+2)(mn+1)\geq 16mn$.

ბ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, მაგრამ $a^2+b^2\geq 2ab$, ე.ი. $a^3+b^3\geq(a+b)(2ab-ab)=ab(a+b)$;

გ) რადგან $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$ და $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+a\sqrt{ab}$
$\sqrt{a+b}\geq 0$ და $(\sqrt{a+b})^2=a+b$, ე.ი. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$;

დ) $\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}} \end{array}\right)$ გადამრავლებით $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$.

48. $\frac{7\cdot 3+3\cdot 2,5}{7+3}=\frac{28,5}{10}=2,85$.

50. ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევარია. ერთი წერტილიდან გავლებული დახრილი ყოველთვის მეტია ამავე წერტილიდან გავლებულ მართობზე.

51. $6\cdot 105+6x=12\cdot 115$.
$x=125\%$.

ტესტი თვითშემოწმებისთვის

1. ბ; 2. ბ; 3. ა; 4. გ; 5. გ; 6. გ; 7. გ; 8. ბ; 9. ა; 10. ბ; 11. გ; 12. გ; 13. ა; 14. ბ; 15. ბ; 16. გ; 17. გ; 18. ბ; 19. დ; 20. ა; 21. დ; 22. ა; გ; დ.

V თავი

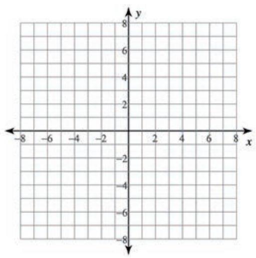
<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: ალგებრა და კანონზომიერება</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 20-25.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ფუნქცია, წრფივი ფუნქცია.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• ნებისმიერი ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაძლებელია დამყარდეს შესაბამისობა.
• თუ, ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობა არის ფუნქციური, მაშინ ამ დამოკიდებულების წესი განსაზღვრავს ამ ფუნქციის თვისებებს.
• რეალურ მოვლენებში კანონზომიერებების აღმოჩენა და ამ კანონზომიერების აღმწერი დამოკიდებულების მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის შესწავლასა და აღწერაში, შესაბამისად სამყაროს შესწავლაში;
• ორ სიმრავლეს შორის ფუნციური დამოკიდებულების წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით.
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ენის გამოყენებით: განტოლება, ცხრილი, გრაფიკი. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ფუნქცია, წრფივი ფუნქცია.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნებები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">კავშირები – სიმრავლეების ელემენტებს შორის შესაბამისობა;
• ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს შესაბამისობა
• ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ფუნქციური კავშირი; ორ სიმრავლეს შორის ფუნქციური დამოკიდებულების წესი განსაზღვრავს ამ ფუნქციის თვისებებს;</td><td>• წრფივი ფუნქცია,
• განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე; ზრდადობა-კლებადობა; ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები
• წრფივი ფუნქცია და მისი გარდაქმნები;
• წრფივი ფუნქციით რეალური სიტუაციის აღწერა;</td><td>1. როგორ შესაბამისობას ვუწოდეთ ფუნქციური?
2. რა ფიგურაა წრფივი ფუნქციის გრაფიკი?
3. დაწერეთ წრფივი ფუნქციის ზოგადი სახე.
4. ახდენს თუ არა კოეფიციენტები გავლენას წრფივი ფუნქციის გრაფიკის და საკოორდინატო ღერძების ურთიერთმდებარეობაზე?
5. ჩამოთვალეთ წრფივი ფუნქციის მოცემის ეკვივალენტური ფორმები.</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში მოიძებნება მოვლენები, რომლებიც წრფივი ფუნქციით აღიწერება.</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს:
გამოთვალონ ავზის მოცულობა;
დათვალონ, რამდენ საათში აივსება ავზი;
საკვანძო შეკითხვა: ა) შეიძლება თუ ავზში არსებული წყლის რაოდენობის დროზე დამოკიდებულების ფორმულის დაწერა?</td></tr>
</table>

• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;
• ორ სიმრავლეს შორის ფუნციური დამოკიდებულება შესაძლებელია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით, რაც ხელს უწყობს დამოკიდებულების უკეთ გააზრებასა და ანალიზს.

ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• რა არის ფუნქცია? რით განსხვავდება ფუნქცია დამოკიდებულებისაგან?
• როგორ შეიძლება ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება?
• შეიძლება თუ არა დავალებაში მოცემული სიტუაციის შესაბამისი ფორმულის დაწერა?

ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
აქტივობა 2:
მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას
1. y და x ცვლადებით აღნიშნონ შესაბამისად ავზში არსებული წყლის რაოდენობა და დრო;
2. დაწერონ ფორმულა: ავზში არსებული წყლის რაოდენობის დამოკიდებულება დროზე;
ა) თუ ავზი წყლის ჩაშვებამდე იყო ცარიელი;
ბ) ავზში წყლის ჩაშვების მომენტში იყო 1000 ლიტრი წყალი.
3. დაწერონ ფორმულა: ავზში არსებული წყლის რაოდენობის დამოკიდებულება დროზე იმ პირობით, რომ ავზში 1 საათში ჩაედინება კ ლიტრი, ხოლო მილის გახსნამდე ავზში იყო ბ ლიტრი წყალი.
4.რა შუალედში იცვლება y სიდიდე?
5. რა შუალედში იცვლება x სიდიდე?
6. იპოვონ ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემული რიცხვებისთვის; გადაიტანონ მიღებული წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე, ააგონ გრაფიკი. გრაფიკის აგების შემდეგ მასწავლებელი ეტყვის, რომ მოცემულ ფუნქცას წრფივი ფუნქცია ეწოდება.
f(x)=2x+1;

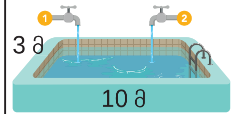
x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



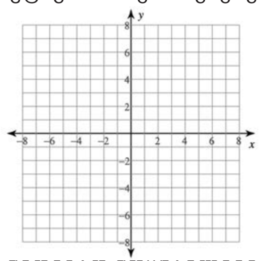
კვლევა: ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგონ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები
1. f(x)=2x და f(x)=–2x
2. f(x)=2x და f(x)=2x+1

კომპლექსური დავალება
დააკვირდით ილუსტრაციას. ნახატიდან ამოკრიფეთ მონაცემები და მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება;

ნაშრომის პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ:
• წარმოადგინეთ კავშირები
• აღწერეთ მოცემული პროცესი.
• მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.



საათში ჩადის 3000 ლიტრი წყალი.

<table>
<tr>
<td>
მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.
• ფუნქციების ცვლილება შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შესაბამისი გრაფიკული გარდაქმნებით;
</td>
<td>
გამოიკვლიონ:
• რომელ საკოორდინატო მეოთხედებშია განთავსებული მოცემული წრფეები (შემთხვევა 1)
• როგორი ურთიერთმდებარეობა აქვთ წრფეებს (შემთხვევა 2)
აქტივობა 3: კვლევა
განვიხილოთ ფუნქციები
f(x)=x; და g(x)=–x; ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგონ მოცემული უნქციების გრაფიკები.
გამოთქვან ვარაუდი, თუ რომელ საკოორდინატო მეოთხედებშია განლაგებული y=kx ფუნქციის გრაფიკი თუ ა) k>0; ბ) k<0.
აქტივობა: კვლევა
f(x)=x და g(x)=–x ფუნქციებისათვის შეავსეთ ცხრილი
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr>
<tr><td>-3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>


კვლევა: კვლევების შედეგად მოსწავლეებმა უნდა დაადგინონ რა ცვლილებას იწვევს შემდეგი მოქმედებები:
f(x)=x; f(x)=x+2; f(x)=x–2; f(x)=–x;
• მოსწავლეებმა უნდა შეადარონ თითოეული ცვლილება საწყის ფუნქცია f(x)=x, განაზოგადონ წესი და ჩამოაყალიბონ კანონზომიერება, რომელიც გამოიკვლიეს თითოეული გარდაქმნის შედეგად;
მოსწავლეებმა გაიაზრონ და იმსჯელონ:
• რატომ და როგორაა შესაძლებელი, რომ ერთი და იგივე ფუნქცია მოცემული იყოს სხვადასხვა ფორმით?
• რა უპირატესობა აქვს თითოეულ ფორმას?
• შეიძლება თუ არა რომ წრფივი ფუნქცია მოცემული იყოს დამატებით მესამე ფორმით? თუ არის შესაძლებელი როგორ?
• როგორ ვიპოვოთ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები?
მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:
• არსებობს ექვივალენუტრი ფორმები და მათი საჭიროება და უპირატესობები;
• კავშირი ეკვივალენტურ ფორმებს შორის;
• კავშირი ცვლადებს შორის და შესაბამის გრაფიკს შორის;
• რა წესით ხდება რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა;
</td>
<td>
მოსწავლეების მზაობისა და ინდივიდუალური საჭიროებების გათვალისწინებისთვის დავალება დიფერენცირებულია და მოიცავს უფრო „ხელმისაწვდომ“ და „გართულებულ“ ვარიანტებსაც. იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f
</td>
</tr>
</table>

	ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით. **საკვანძო შეკითხვა:** როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს? **აქტივობები:** მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს.	კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები) **ეტაპი I.** მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:** **ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.	
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი. თავი 5	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება.

1. ფუნქციის ცნება

რეზიუმე:

მოსწავლეებს კონკრეტული მაგალითების საფუძველზე დავანახოთ, თუ როგორი შესაბამისობაა ფუნქცია. რას ნიშნავს ჩანაწერი f(-1), f(5)... როცა მოცემულია y=f(x) ფუნქცია (მაგალითად, f(x)=5x-1; f(x)=x2-1...). მნიშვნელოვანია, რომ თვითონვე მოიყვანონ ისეთი შესაბამისობის მაგალითები, რომლებიც იქნება ფუნქცია ან პირიქით, არ იქნება ფუნქცია და შეძლონ ამის დასაბუთება.

ამოხსნები, მითითებები:

6. ა) არა, რადგან აბსცისათა ღერძზე მდებარე ერთ (შავ) წერტილს შეესაბამება ორი ცისფერი წერტილი; ბ) ფუნქციაა. ასეთი მაგალითები შესაძლებელია თვითონაც მოიგონოთ. ეს მაგალითები ხელს შეუწყობს, შემდგომ, ფუნქციის გრაფიკული განმარტების ადვილად აღქმას.

7. $v=a^3$ არის ფუნქცია. $a \to a^3$.

8. $f(0)=-0^2+7=7$; $f(-2)=-(-2)^2+7=3$.

10. გადადის ორი ბიჭი. ერთ-ერთი რჩება მეორე ნაპირზე, ერთი კი ნავს აბრუნებს უკან. გადადის ორი ჯარისკაცი, ბიჭს ნავი მოჰყავს უკან. ბიჭები დაუბრუნდნენ საწყის პოზიციას, ამასთან ორი ჯარისკაცის გადაყვანას დასჭირდა ორი წრე.
ა) სამი ჯარისკაცის გადაყვანას დასჭირდება 4 წრე;
ბ) ათი წრე.

11. ა) „5 ან 5 ქ-ზე ნაკლები“ სექტორის გრადუსული ზომაა 108°.

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \longrightarrow 100\% \\ 108^\circ \longrightarrow x\% \end{array}\right) \Rightarrow x=\frac{108\cdot 100}{360}=30\%$$

ბ) 70%; გ) $x=\frac{36}{360}=\frac{1}{10}$ ნაწ.

დ) წრიული დიაგრამის გამოყენება განსაკუთრებით მოსახერხებელია ისეთ შემთხვევებში, როცა მონაცემები ნაწილებით ან პროცენტებითაა წარმოდგენილი.

12. ა) 3 000 ლარი; ბ) ივლისში — 5000 ლარი;

გ) $\frac{30300}{12}=2525$ ლარი; დ) 3000 ლარი; ე) 5000–(-500)=5500 ლარი;

ვ) სვეტოვანი დიაგრამის გამოყენება განსაკუთრებით მოსახერხებელია მაშინ, როცა საჭიროა მონაცემები სწრაფად და ადვილად (თვალსაჩინოდ) შევადაროთ.

13. რადგან მედიანა 24-ია და მოდა 18, რიცხვები შემდეგნაირად განლაგდება: 13; 18; 18; 24; a; b; 37. თუ მათ 8-ს და 43-ს დავუმატებთ, ვარიაციულ მწკრივში I ადგილს დაიკავებს 8, ხოლო 43 ბოლოს, ე.ი. მედიანა არ შეიცვლება, არც მოდა, შეიცვლება საშუალო.

15. ცხადია, გამოკლებას.

16. $\angle ADB=2x+14^\circ$ (გარე კუთხე). $2x+14=90-32$, საიდანაც $x=22^\circ$.

2. ფუნქციის მოცემის ხერხები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს თუ რა უპირატესობა აქვს ფუნქციის მოცემის თითოეულ ხერხს. მიუხედავად იმისა, რომ ფუნქციის გრაფიკზე თვალსაჩინოდ ვხედავთ ფუნქციის ყოფაქცევას განსაზღვრის არის რაღაც ნაწილზე მაინც, ჩვენ ვერ შევძლებთ არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნას. ყურადღება მივაქციოთ არეზე მოცემულ ფუნქციებს – 1. ერთსა და იმავე სიმრავლეებს შორის შესაძლებელია დავამყაროთ სხვადასხვა ფუნქციური შესაბამისობა. 2. y(x) და h(x) სხვადასხვა ფუნქციებია, რადგან განსხვავდება მათი განსაზღვრის არეები.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $x \in R$; ბ) $x \neq 2$; დ) $4x^2-9 \neq 0$; $x \neq \pm 1,5$.

3. ა) $y=4$; ე.ი. $3,5x-4=4 \Rightarrow x = x = \frac{8}{3,5} = \frac{16}{7}$; ბ) $y(2)=3,5 \cdot 2-4=3$.

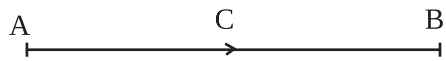
6. $y=10-0,8x$.

ა) $0 \leq 10-0,8x \leq 10 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{25}{2}$. $x \in Z$.

$x=0; 1; 2; \ldots 12$.

7. $y=300x+500$. ა) $500+300 \cdot 4=1700$.

8. $y=500-60x$



ა) $0 \leq 500-60x \leq 500$ $AB=500$; $AC=60x$; $CB=y$.

$0 \leq x \leq 8\frac{1}{3}$.

ბ) 8 სთ 20 წთ; გ) $y=100 \Rightarrow x = \frac{500-100}{60} = \frac{20}{3}$=6 სთ 40 წთ.

11. $\overline{ab} = 7 \cdot b \Rightarrow \overline{ab} = 35$. აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ მოცემული A რიცხვისთვის A=7b. b-ს მაქსიმუმია 9, 7•9=63 ე.ი ამ რიცხვის მაქსიმუმია 63. ე.ი საკმარისია განვიხილოთ ორნიშნა რიცხვი, $\overline{ab}$.

12. I. 4 ტრ → 8 დღე →16 ჰა
2 ტრ → 1 დღე →1 ჰა

II. 6 ტრ → 1 დღე →3 ჰა
6 ტრ → 10 დღე →30 ჰა

პასუხი: 10 დღე.

3. ფუნქციის გრაფიკი

რეზიუმე:

მოსწავლეებს უმუშავდებათ ჩვევა – წერტილების საშუალებით ააგონ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. უნდა ესმოდეთ, რომ ფუნქციის განტოლებას აკმაყოფილებენ მხოლოდ და მხოლოდ გრაფიკზე მდებარე ყოველი წერტილის კოორდინატები. უნდა შეძლონ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული წირებიდან ამოიცნონ, თუ რომელია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი და რომელი – არა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ყურადღება მივაქცევინოთ, რომ თუ არსებობს x-ის ერთი მნიშვნელობა მაინც, რომელსაც შეესაბამება გრაფიკის იმავე აბსცისის მქონე 1-ზე მეტი წერტილი. ასეთ შემთხვევაში წირი არ იქნება ფუნქცია.
ა) არის; ბ) არის; გ) არ არის; დ) არის; ე) არ არის; ვ) არის.

5. A(0; -1). შევამოწმოთ სრულდება თუ არა პირობა b=f(a).

$-1=\frac{5\cdot 0-1}{2\cdot 0+1}$ -1=-1, ე.ი. A მდებარეობს გრაფიკზე.

B(2,3); $3=\frac{5\cdot 2-1}{2\cdot 2+1}$ $3=\frac{9}{5}$ მცდ. B არ მდებარეობს გრაფიკზე.

6. ა) არის; ბ) არ არის; გ) არის; დ) არ არის; ე) არ არის.

9. A–გ; B–ა; C–დ; D–ბ.

11. ა) $y=2x-5$; ბ) $y=x^3$; გ) $y=\frac{1}{x}$; დ) $y=-x+1$.

12. n-3; n-2; ...; n+4
(n-3)+(n-2)+(n-1)=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4).
2n=-16
n=-8
-11; -10; -9; -8; ... ; -4.

ტესტი
1. ბ; **2.** გ; **3.** ბ; **4.** ბ; **5.** გ; **6.** გ; **7.** დ; **8.** გ; **9.** გ; **10.** გ.

1-ლ ამოცანაში ყურადღება გავამახვილოთ იმაზე, რომ პასუხი „ა“ არ არის სწორი, რადგან თებერვალში დღეების რაოდენობა იცვლება.

4. წრფივი ფუნქცია

რეზიუმე:

პარაგრაფი იყოფა ორ თავად. მასალა და შესაბამისი სავარჯიშოები გამოყოფილია მოსწავლის წიგნში.

1. პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია

ამოხსნები, მითითებები:

3. „ა“ და „ბ“ შემთხვევებში II და IV ; „გ“ და „დ“ შემთხვევებში I და III მეოთხედებში.

4. ა. $2=\frac{1}{3}\cdot 4$ (მცდარია), მაშასადამე A(4;2) წერტილი არ მდებარეობს $y=\frac{1}{3}x$ ფუნქციის გრაფიკზე.

5. რადგან (15;3) წერტილი მდებარეობს y=kx ფუნქციის გრაფიკზე, ამიტომ 3=15k ტოლობა ჭეშმარიტია ე.ი $k=\frac{1}{5}$. ფუნქცია იქნება $y=\frac{1}{5}x$.

ა. A(5;7,5) არ მდებარეობს $y=\frac{1}{5}x$ ფუნქციის გრაფიკზე, რადგან ტოლობა $7{,}5=\frac{5}{5}$ მცდარია.

6. y=kx ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს (1;2) წერტილი

8. უნდა შემოწმდეს $\frac{y_A}{x_A}=\frac{y_B}{x_B}=\frac{y_C}{x_C}$.

12. რადგან წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე, ფუნქციას ექნება y=kx სახე $A(\frac{1}{3};4)$ წერტილი ეკუთვნის ამ წრფეს. ე.ი $4=k\frac{1}{3}$, საიდანაც k=12. ფუნქცია იქნება y=12x

14. გამოიყენეთ S=Vt ფორმულა

15. ა) 1–3+5–7+...+97–99=(1–3)+(5–7)+...+(97–99)=-2·25=-50.
გ) 1000000–(1000000–(1000000–(1000000–(1000000–999999))))=1000000–1000000+(1000000–1000000+1)=1.

16. 30,60,90

2. y=kx+b წრფივი ფუნქცია

ამოხსნები, მითითებები:

1. წრფივია I, III და V. ხაზი გავუსვათ, რომ IV გრაფიკი არ არის ფუნქცია.

6. x ღერძიან კვეთის საპოვნელად კეთდება ჩასმა y=0, ხოლო y ღერძთან კვეთისას – ჩასმა x=0. y ღერძი. კვეთისას შეუძლიათ პირდაპირ b კოეფიციენტი დაასახელონ.

10. ა. $k–1=–1 \Rightarrow k=0$
ბ. უნდა იყოს x ღერძის პარალელური, ანუ k–1=0
გ. ანუ გადის (–2;0) წერტილზე.

13. ა. b–7=0; k≠0
ბ. b=0; k≠3

14. ბლაგვი კუთხის შემთხვევა k<0 ე.ი ბ. და დ.
მახვილი კუთხით დახრა k>0 ე.ი ა. და გ. შემთხვევები.

15. კვეთის შემთხვევაში $k_1 \neq k_2$. (ბ. და დ. შემთხვევები)
y=5x წრფეს გადაკვეთს ბ) და დ) ფუნქციათა გრაფიკები (დახრის კოეფიციენტები ტოლი არ არის).

18. ამოვხსნათ სისტემები:
ა) (11; 37) ; ბ) (–22; –29); გ) (3; 5); დ) (–4; –13).

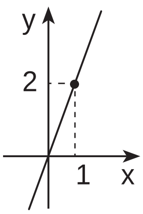
19. ა. $\begin{cases} b>0 \\ k>0 \end{cases}$; ბ. $\begin{cases} b<0 \\ k>0 \end{cases}$; გ. $\begin{cases} b>0 \\ k<0 \end{cases}$; დ. $\begin{cases} b<0 \\ k<0 \end{cases}$.

20. b წრფე გადის (0;3) და (4;0) წერტილებზე. $y=kx+b$-ში ჩავსვათ ამ წერტილების კოორდინატები და ამოვხსნათ სისტემა.

21. ჯერ ვიპოვოთ A(0;1) და B(–2;–1) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. წრფეს ვეძებთ $y=kx+b$ ფორმულით

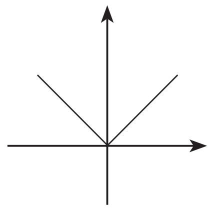
$$\begin{cases}1=0k+b\\-1=-2\cdot k+b\end{cases}\qquad\begin{cases}b=1\\k=1\end{cases}$$

მივიღეთ $y=x+1$ წრფე
C(5;k) წერტილში მდებარეობს ამ წრფეზე ანუ $k=5+1=6$

23. 

ა. I ჯერ ავაგოთ $y=2x$ წრფე

II $y=2x$ წრფის გრაფიკიდან რომ მივიღოთ $y=2|x|$ ფუნქციის გრაფიკი, ამისათვის $x\geq 0$ დავტოვოთ, ხოლო $x<0$-თვის ავაგოთ გრაფიკის x ღერძის ქვემოთა ნაწილის ($y<0$) x ღერძის მიმართ სიმეტრიული.



25. ეს იქნება გრაფიკის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $x=-1$-ის და $x=4$-ის შესაბამის წერტილებს გრაფიკზე.

30. ა. $y=2x$ ბ. $y=\frac{1}{2}x$

ტესტი
1. ა; **2.** გ; **3.** გ; **4.** დ; **5.** ბ; **6.** გ; **7.** გ.

5. წრფივი განტოლებისა და უტოლობის გრაფიკული ამოხსნა

რეზიუმე:

არსებითია მოსწავლეს ესმოდეს გრაფიკზე წერტილების კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება. ის, რომ თუ $(x_o;y_o)$ წერტილი მდებარეობს $y=f(x)$ გრაფიკზე, მაშინ $yo=f(x_o)$, ხოლო თუ იგივე წერტილი $y=\varphi(x)$ გრაფიკზეც მდებარეობს, მაშინ $y_o=f(x_o)$ ე. ი. x_o წერტილისთვის $f(x)=\varphi(x)$.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ამ განტოლებებს მოსწავლეები ანალიზურად იოლად ხსნიან. არსებითია მათ ისინი გრაფიკულად ამოხსნან და შემდეგ შედეგები შეადარონ.
ა) ავაგოთ $y=5x-1$ და $y=3$ წრფეები. ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილის აბსცისა $x=\frac{4}{5}$.

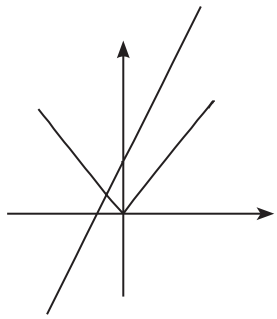
2. ა) $\begin{cases}5k+b=0\\0\cdot k+b=3\end{cases}\qquad\begin{cases}k=-\frac{3}{5}\\b=3\end{cases}$

3. დავწეროთ f წრფივი ფუნქცია მოცემული პირობებით.
$f(x)=3x+b$
$0=3\cdot4+b$, ე.ი. $b=-12$
$f(x)=3x-12$.

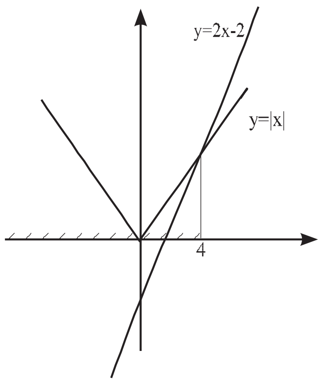
$3x-12=3$
$x=5$.

4. გრაფიკულად:
1 ამონახსნი.

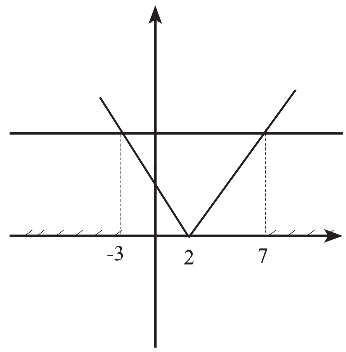
ა)



5. გ) $|x|=2x-4$.
გრაფიკიდან ჩანს, რომ ტოლობა სრულდება, როცა $x=4$



ე) $|x-2|=5$ გრაფიკიდან ჩანს, რომ $x=-3$ და $x=7$.



10. ა) შეუსვენებლად იმოძრავა II ჯგუფმა და მისი სიჩქარე ტოლი იყო $\frac{8}{3}$ კმ/სთ;
ბ) 3 სთ; გ) 1 სთ-ში და შეისვენა 1 სთ; დ) ისინი შეხვდნენ გასვლიდან 1 სთ. 30 წთ-ში.

14. თუ შევკრებთ დათოსა და ლევანის, აგრეთვე ლევანისა და კახას თანხებს, მივიღებთ 28 ლ-სა და 50 თ-ს. ამ თანხაში ლევანის თანხა ორჯერ არის შესული, ე.ი. 28,50-20=8,50. ეს არის ლევანის თანხა. ცხადია, შეიძლება ამოცანა ამოიხსნას სისტემითაც.

6. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა იცოდეს, რომ თუ წერტილი მდებარეობს ორუცნობიანი განტოლების გრაფიკზე, მაშინ მისმა კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს გრაფიკის შესაბამისი განტოლება, რომ $ax+by+c=0$, სადაც a ან $b\neq0$ განტოლების გრაფიკი წრფეა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. x — ბურთი; y — მანქანა $\Rightarrow$ 2x+3y=20.

$x = \dfrac{20-3y}{2} = 10 - \dfrac{3y}{2}$, ე.ი. y არის 2-ის ჯერადი.

y	0	2	4	6
x	10	7	4	1

4. ა) $3(-1)-5\cdot 2\neq 1$ — არ გადის; ბ) $4\cdot 2+7(-1)\neq 2$ — არ გადის;
გ) $3(-1)-2=-5$ — გადის; დ) $10\cdot 2=21-1$ — გადის.

6. $a\cdot 2+5\cdot 3=21 \Rightarrow a=3$.

7. A(x; 3) $18x+7\cdot 3=12 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

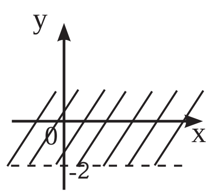
8. $\overline{ab}$; a+b=16.

ა)

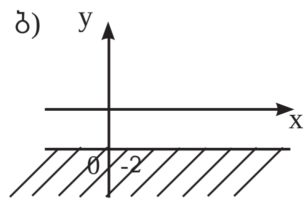
a	9	8	7
b	7	8	9

$\Rightarrow \overline{ab}=97;\ 88;\ 79.$

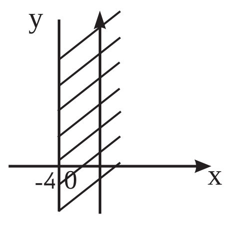
11. ა)



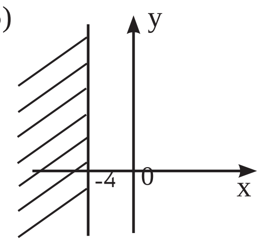
ბ)



გ)



დ)



13. უ.ს.ჯ. (2; 3; 4; ...; 10)=$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$=2520.

14. 1) 2; 7; 12; 17; 22; 27; 32;
2) 6; 14; 22; 30; 38; 46; 54.

15. $P=\dfrac{F}{S}$, $P=\dfrac{4\text{კნ}}{0,16\text{მ}^2}=\dfrac{4000\text{ნ}}{0,16\text{მ}^2}=25000\text{პა}$ (პასკალი).

7. ამოვხსნათ განტოლება მთელ რიცხვებში

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ორუცნობიანი წრფივი განტოლების ამოხსნა მთელ რიცხვებში.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ა. $x(y–3)=10$

$\begin{cases} x = 1 \\ y - 3 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 \\ y - 3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y - 3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y - 3 = 2 \end{cases}$

(1;13); (10;4) (2;8) (5;5)

2. პირველი რიცხვი ვიპოვოთ შერჩევით, დაბოლოებებით:

$$\begin{array}{r} 73 \\ 137 \\ \hline 10001 \end{array}$$

ბოლო ციფრი უნდა იყოს 7, ნამრავლის ათეულების ციფრი რომ გამოვიდეს 0, შემდეგი ციფრი უნდა იყოს 3 და ა.შ.
ამის შემდეგ, 137-ის წინ შევარჩიოთ ციფრები ისე, რომ ნამრავლი არ გადასცდეს 100000-ს. ასეთად გამოდგება მხოლოდ 1137 ($2137\times73=156001$).

4. პატარა ყუთები იყოს x, დიდი – y. მაშინ $10x+13y=195$ განტოლება უნდა ამოიხსნას ნატურალურ რიცხვებში (შეიძლება ერთ-ერთი იყოს 0-იც).

$y=\frac{195–10x}{13}$ $y=\frac{5(39–2x)}{3}$

ცხადია, $(39–2x)⋮13$

შესაძლებელია შემთხვევები $\left[\begin{array}{l} x=0;\ y=65 \\ x=1;\ y=5 \end{array}\right.$

5. ა. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{5}{14}$; $7xy+24\cdot7=15y;\ y(15–7x)=24\cdot7$

შერჩევით (1;21) (2;168)

დ. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=–\frac{5}{6}$

$3x+2y=–5$

არ იხსნება ნატურალურ რიცხვებში

7. $x–6y=25$ განტოლების ამონახსნებში გვინდა ვიპოვოთ წყვილი, რომელიც შედგება ან ტოლი, ან მოპირდაპირე რიცხვებისგან. ე.ი. I. $x=y$ ან II. $x=–y$

I. $x–6x=25$ $x=y=–5$

II. $x=6y=25$ $x=\frac{25}{7}=y$

9. $a\in(0;1) \Rightarrow \sqrt{a^2}=a$ და $=1–a$

$\frac{a}{\sqrt{a^2}}\cdot\frac{a–1}{|a–1|}=\frac{a}{a}\cdot\frac{a–1}{1–a}=–1$

8. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოუხსნელად დაადგინოს, თუ რამდენი ამონახსნი აქვს სისტემას. უნდა იცოდეს, რომ განტოლებათა სისტემის გრაფიკული ამოხსნა გვაძლევს მის მიახლოებით ამონახსნს.

ამოხსნები, მითითებები:

4. ა) $\begin{cases} y = 3x \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$ ერთი ამონახსნი; ბ) $\begin{cases} y = -0,3x + 1,6 \\ y = -0,3x + 1,6 \end{cases}$ უამრავი ამონახსნი.

გ) $\begin{cases} y = -0,4x + 1,2 \\ y = -0,4x + 0,12 \end{cases}$ არა აქვს ამონახსნი.

6. $3x–4y=7 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x–\frac{7}{4}$ ვეძებთ $y=kx=b$

ა. $k\neq\frac{3}{4}$, b ნებისმიერია

ბ. $k=\frac{3}{4}$; $b=\frac{7}{4}$

გ. $k=\frac{3}{4}$; $b\in R\setminus\left\{\frac{7}{4}\right\}$

8. ვაშლების რაოდენობის 4-ჯერ განახევრების შემდეგ დარჩა ათი ვაშლი. ე.ი. იყო $10\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=160$. მცველებს შეხვდათ 150 ვაშლი.

9. $\overline{ab}-(a+b)=10a+b–a–b=9a$ – 9-ის ჯერადია. ე.ი.

XI → 9–9=0;

X → 18–9=9

IX → 27–9=18

VIII → 36–9=27

....

II → 99–18=81

I →

ეს არის ბოლოს წინა ოპერაცია. პირველ ოპერაციაზე მიგვილია 99. რიცხვს გამოკლებული მისი ციფრთა ჯამი არის 99. ასეთი რიცხვებია 100-დან 108-მდე რიცხვები. 109-ზე უკვე დაგვჭირდება 12 ასეთი ოპერაციის ჩატარება.
პასუხი: 100-დან 108-მდე.

ტესტი
1. გ; **2.** დ; **3.** ა; **4.** ბ; **5.** ა.

9. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $\begin{cases} y = 3x + 8 \\ x + 3x + 8 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x = 1 \end{cases}$ $(1;11)$**;**

გ) $\begin{cases} x = 3y + 4 \\ 2(3y + 4) - 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ y \in R \end{cases}$ $\left(x, \frac{x-4}{3}\right)$ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ე) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x - 7 = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$ $(2;5)$**;** ზ) (4,5; 7);

ი) $\begin{cases} x = -5y + 3 \\ 9 - 11y = 2(-5y + 3) \end{cases} \Rightarrow$ (-12; 3).

2. ა) $\begin{cases} 2x = 4 - 5z \\ -3(4 - 5z) - 8z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 - 5z \\ z = 2 \end{cases}$ (-3;2);

ბ) $\begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}b\right) + 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ b = 3 \end{cases}$ (-4;3);

კ) $\begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{y}{5} = 4 \quad \Big| \cdot 10 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = -\frac{1}{6} \quad \Big| \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x + 2y = 40 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x + 2(-2x - 1) = 40 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ (2;-5).

3. გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებს ორივე წრფის განტოლებას, ამიტომ იქნება შემდეგი სისტემის ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - 5y}{2} \\ \frac{45 - 15y}{2} + 8y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - 5y}{2} \\ 45 - 15y + 16y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - 5y}{2} \\ y = -47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 + 5 \cdot 47}{2} = 125 \\ y = -47 \end{cases}$

4. I. ვიპოვოთ წრფეების გადაკვეთის წერტილი:

$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x + 9x - 12 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ M(1;-1).

M-ის კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს $ax–2y=1$ განტოლება: $a \cdot 1–2(-1)=1 \Rightarrow a=-1$.

6. ჯერ ვიპოვოთ AB წრფის განტოლება. ამ განტოლებაში x=0 ჩასმით ვიპოვით y ღერძთან კვეთის წერტილს, y=0 ჩასმით კი – x ღერძთან კვეთის წერტილს.

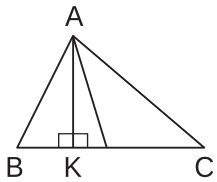
7. ჯერ ვიპოვოთ რომელიმე ორი წრფის კვეთის წერტილი, შემდეგ მესამე წრფე შევამოწმოთ გადის თუ არა ამ წერტილზე.

8. წრფე გადის (0; 4) და (4; 0) წერტილებზე. მეორე წრფე გადის (1;0) და (–1; 0) წერტილებზე. დავწეროთ მათი განტოლებები და შემდეგ ვიპოვოთ მათი კვეთის წერტილი.

9. $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c)=9\cdot 11(a-c)$ მიღებული, რომ სრული კვადრატი იყოს, უნდა შესრულდეს $a-c=11k^2$, რაც შეუძლებელია, რადგან a; c<10.

11. 1:400000 $\Rightarrow$ 1 სმ $\rightarrow$ 400000 სმ, ე.ი. 1 სმ $\rightarrow$ 4 კმ ანუ 10 სმ $\rightarrow$ 40 კმ.

12. AK<AB ე.ი. შეიძლება იყოს მედიანა.



13. ა. ჭ   ბ. ჭ

14. ა. (–4;–7)   ბ. (4;7)   გ. (4;–7)

15. ა. x ღერძამდე მანძილია y კოორდინატის მოდული ანუ 7, y ღერძამდე კი – x კოორდინატის მოდული, ანუ 5. სათავემდე მანძილი იქნება $\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$

10. ალგებრული შეკრების ხერხი

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა) $\begin{cases}7x+10y=3\\2x+5y=3\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 1\\\cdot(-2)\end{matrix}\right.$ $\quad\begin{cases}7x+10y=3\\-4x-10y=-6\end{cases}$

$$3x=-3$$

$\begin{cases}x=-1\\2\cdot(-1)+5y=3\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ $\quad$ (-1;1)

ბ) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2\\\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y+1}{3}=4\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 6\\\cdot 12\end{matrix}\right.$ $\quad\left.\begin{cases}3x+9-2y+4=12\\3x-3+4y+4=48\end{cases}\right)\Rightarrow\begin{cases}3x-2y=-1\\3x+4y=47\end{cases}$

$$-6y=-48$$

$\begin{cases}y=8\\3x-2\cdot 8=-1\end{cases}$ $\quad\begin{cases}y=8\\x=5\end{cases}$ $\quad$ (5;8);

თ) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2y}{3}=\dfrac{5}{2}\\\dfrac{3x}{2}+2y=0\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 6\\\cdot 2\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow\left.\begin{cases}3x+3y-4y=15\\3x+4y=0\end{cases}\right)\Rightarrow\begin{cases}3x-y=15\\3x+4y=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$ (4;-3).

$$-5y=15$$

5. რადგან A და B წერტილები მდებარეობს წრფეზე, ამიტომ მათმა კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს წრფის განტოლება. მივიღებთ სისტემას:

ა) $\begin{cases} 2k + b = 5 \\ 3k + b = -1 \end{cases}$ $\quad k = -6$, $b = 17$

$-k = 6$

ე.ი. y=-6x+17. არის საძიებელი წრფის განტოლება.

6. **ა.** წრფე გადის (2;0) და (0;6) წერტილებზე;
ბ. წრფე გადის (4;1) და (–1;–1) წერტილებზე.

9. ვთქვათ, იყიდა x კომბაინი და y ტრაქტორი, მაშინ

$$\begin{cases} y = 1,4x \\ x + y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 14 \end{cases}$$

10. ვთქვათ, I-ზე აილო x ტ, II-ზე კი — y ტ. x+y=460.

I-ზე გაიზარდა მოსავალი 0,15x ტ-ით.

II-ზე კი — 0,1y ტ-ით.

0,15x+0,1y=516–460.

$$\left.\begin{cases} x + y = 460 \\ 15x + 10y = 5600 \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -920 \\ 3x + 2y = 1120 \end{cases}$$

$$x = 200$$

I → 200 ტ.

II → 260 ტ.

11. $\overline{ab} = 1,75\overline{ba}$
$\overline{ab} = 18 + a + b$

$$\begin{cases} 10a + b = \dfrac{7}{4}(10b + a) \\ 10a + b = a + b + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40a + 4b = 70b + 7a \\ 9a = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 66b = 33 \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{ab} = 21.$$

პასუხი: 21.

16. 

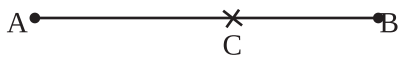
ვთქვათ, $V_A=x$ და $V_B=y$.

I. $t_B=2{,}5 \Rightarrow t_A=4{,}5$. მივიღეთ $4{,}5x+2{,}5y=30$.

II. $t_B=5 \Rightarrow t_A=3$. მივიღეთ $3x+5y=30$.

$$\begin{array}{l}\begin{cases}9x+5y=60\\ -9x-15y=-90\end{cases}\\ \hline -10y=-30\end{array} \qquad \begin{cases}x=\dfrac{60-5\cdot 3}{9}=5\\ y=3\end{cases}$$

პასუხი: 5 კმ/სთ, 3 კმ/სთ.

17. 

AB=650კმ

I. ვთქვათ, $V_A=x$ და $V_B=y$.

$10x+10y=650$.

II. $t_B=8$ სთ $t_A=8$ სთ+4სთ.20წთ.$=12\frac{1}{3}$სთ.

$$\frac{37}{3}x+b_y=650$$

მივიღეთ სისტემა: $\begin{cases}x+y=65\\ 37x+24y=1950\end{cases}\Bigg| \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{cases}-24x-24y=-24\cdot 65\\ 37x+24y=1950\end{cases}\\ \hline 13x=1950-24\cdot 65\\ 13x=65(30-24)\\ x=30\end{array} \qquad \begin{cases}x=30\\ y=35\end{cases}$

პასუხი: 30 კმ/სთ, 35 კმ/სთ.

18. ვთქვათ, პირველი 1 დღეში ასრულებს სამუშაოს x ნაწილს, მეორე კი y ნაწილს, მაშინ $6x+6y=1$.

თუ I მუშა დღეში შეასრულებს $\frac{x}{2}$ ნაწილს, ხოლო II კი 3y ნაწილს, მაშინ გვექნება:

$$4\left(\frac{x}{2}+3y\right)=1.$$

$$\begin{cases}6x+6y=1\\ 2x+12y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+6y=1\\ -6x-36y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\dfrac{1}{15}\\ x=\dfrac{1}{10}\end{cases}$$

I სამუშაოს შეასრულებს 10 დღეში.
II კი — 15 დღეში.

19. V_1=x ნაწ/სთ, V_2=y ნაწ/სთ.

$$\begin{cases} 2x+2y=\frac{5}{12} \\ x+3y=\frac{11}{24} \end{cases}$$

21. I → x ლარი.

II → y ლარი.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{3}y=30 \\ y+\frac{3}{4}x=30 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=20 \\ y=15 \end{matrix}$$

23. ა) $4x^2+24x+36=0|:4$

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$x=-3$

გ) $100x^2–64=0|:4$

$25x^2–16=0$

$(5x–4)(5x+4)=0$

$5x–4=0$ ან $5x+4=0$

$x=\pm\frac{4}{5}$

26. ა) $132^2–131^2=(132–131)(132+131)=263$;

ბ) $(1001–1000)(1001+1000)=2001$.

ტესტი

1. გ; **2.** გ; **3.** ა; **4.** დ; **5.** ბ; **6.** გ.

11. განტოლების ამოხსნა მთელ რიცხვებში* (გაგრძელება)

მოსწავლეებს ვუთხრათ, რომ ax+by=c განტოლებას მთელ რიცხვებში და ამონახსნი არ აქვს, თუ c არ იყოფა უსგ(a;b)-ზე.

ამოხსნები, მითითებები:

1.

ა. $x^2–y^2=17$

$(x–y)(x+y)=17$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=17 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=17 \\ x+y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-17 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-17 \\ x+y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

(9;8); (9; –8); (–9;–8); (–9;8)

ბ. $x^2+3xy=2$

$x(x+3y)=2$

$\begin{cases}x=2\\x+3y=1\end{cases}$

$\begin{cases}x=1\\x+3y=2\end{cases}$

$\begin{cases}x=-2\\x+3y=-1\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1\\x+3y=-2\end{cases}$

გ. $(2x-y)(2x+y)=7$

დ. $x^2+3y^2-4xy-6y-12=0$ $\quad(-6;-4)$

$x^2-4xy+4y^2-y^2-6y-9-3=0$ $\quad(-2;-2)$

$(x-2y)^2-(y+3)^2=3$ $\quad(-6;-2)$

$(x-3y-3)(x-y+3)=3$ $\quad(-2;-4)$

ე. $x^2-y^2-10x+2y+22=0$

$x^2-10x+25-y^2+2y-1-2=0$

$(x-5)^2-(y-1)^2=2$

$(x-5-y+1)(x-5+y-1)=2$

$(x-y-4)(x+y-6)=2$

ვ. $x^2-4xy+3y^2=-1$

$x^2-3xy-xy+3y^2=-1$

$x(x-3y)-y(x-3y)=-1$

$(x-3y)(x-y)=-1$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3y=-1\\x-y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-3y=1\\x-y=-1\end{cases}\end{array}\right.$ $\quad(2;1)$ $\quad(-2;-1)$

ზ. $x^2-5xy+6y^2=3$

$x^2-2xy-3xy+6y^2=3$

$x(x-2y)-3y(x-2y)=3$

$(x-2y)(x-3y)=3$

თ. $2x^2+3xy-2y^2=13$

$2x^2+4xy-xy-2y^2=13$

$2x(x+2y)-y(x+2y)=13$

$(x+2y)(2x-y)=13$

ი. $x^2-xy-6y^2=5$

$x^2-3xy+2xy-6y^2=5$

$x(x-3y)+2y(x-3y)=5$

$(x-3y)(x+2y)=5$

კ. $x^2-6xy+5y^2=5$

$x^2-xy-5xy+5y^2=5$

$x(x-y)-5y(x-y)=5$

$(x-y)(x-5y)=5$

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები

4. ა) R; ბ) $4x^2+12x+9\neq0 \Rightarrow x\neq-\frac{3}{2}$; გ) $(|x|-1)(|x|-3)\neq0 \begin{cases}|x|\neq 1\\ |x|\neq 3\end{cases} \Rightarrow x\neq1; -1; 3; -3;$

დ) $(x^2+3)^2\neq0$ $x\in R$; ე) $(|x|-1)(x^2+1)\neq0 \Rightarrow |x|-1\neq0 \Rightarrow x\neq\pm1$;

ვ) $x^4-1\neq0$; $(x^2-1)(x^2+1)\neq0$; $(x-1)(x+1)\neq0$.
$x\neq1; -1$.

6. არის.

8. ფუნქციის გრაფიკია: ა); დ).

9. წრფივი ფუნქციის გრაფიკია, ბ და დ კი წრფეები არ არის. ე.ი. პასუხის ა, ბ და ე. ვ. წრფეა, მაგრამ არ არის ფუნქციის გრაფიკი.

10. წრფივია. ა) $y=\frac{5}{9}x-\frac{1}{9}$; გ) $y=5x^2-5x-5x^2+7=-5x+7$ და დ).

12. $k=-2$. $y=-2x-2{,}5$.

თუ $x=0 \Rightarrow |y|=|-2{,}5|=2{,}5$.

თუ $y=0 \Rightarrow |x|=\left|-\frac{2{,}5}{2}\right|=1{,}25$.

13. $y=kx+b$; $k=3$. ე.ი. $\left.\begin{cases}y=3x+b\\ A(-2;5)\end{cases}\right) \Rightarrow 5=-6+b$
$b=11$.
$y=3x+11$.

14. I გზა:

+1 +1 +1 +1 +1 +1

x:	1	2	3	4	5	6	7
y	5	3	1	-1	-3	-5	-7

-2 -2 -2

არ მდებარეობს.

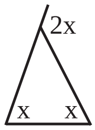
II გზა: დავწეროთ A და B წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება:

$$\left.\begin{cases}y=kx+b\\ A(2;3)\\ B(1;5)\end{cases}\right) \Rightarrow \begin{cases}2k+b=3\\ k+b=5\end{cases} \qquad \begin{cases}k=-2\\ b=7\end{cases}.$$

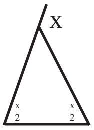
$$k=-2$$

$y=-2x+7$ (1) შევამოწმოთ მდებარეობს თუ არა (1) წრფეზე C წერტილი:

$-2\cdot7+7\overset{?}{=}9$
$-14+7\neq9$ არ მდებარეობს.

15. ა) 

f:x→2x f(x)=2x

ა) 

f:x→$\frac{x}{2}$ f(x)=$\frac{x}{2}$.

16. ა)

წლოვანება	ლიტრ.	წერტილი
3	58	(3; 58)
7	65	(7; 65)

v=kx+b

$$\begin{cases} 3k + b = 58 \\ 7k + b = 65 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{7}{4} \\ b = 52\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$4k = 7$$

ე.ი. $y = \frac{7}{4}x + 52\frac{3}{4}$

ბ) $x = 5 \Rightarrow y = 8\frac{3}{4} + 52\frac{3}{4} = 61,5$;

გ) $y = 60 \Rightarrow 60 = \frac{7}{4}x + \frac{211}{4}$; 240=7x+211⇒ x=y $= \frac{29}{7} = 4\frac{1}{7}$, 4 წლის ძროხა.

17. ვიპოვოთ რომელიმე წრფის გადაკვეთის წერტილი:

$$\begin{cases} y = -1,3x - 0,7 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$$

-1,3x–0,7=3x–5
x=1; y=-2.

შევამოწმოთ y=0,5x–2,5 გადის თუ არა (1; -2) წერტილზე, ე.ი. წრფეები იკვეთება.

18. ა) [-4;5]; ბ) [1;2]; გ) {-3;0;3};

დ) f(x)>0, როცა x∈(-3; 0)∪(3; 5).

f(x)<0, როცა x∈(-4; -3)∪(0; 3).

19. f(x)=-x+3 g(x)=kx+b.

ცხადია, b=3 და g(x) წრფე გადის (-2; 0) წერტილზე, ე.ი. g(x)=$\frac{3}{2}$ ·x+3.

21. f:y=kx+b გადის (-2; 3) და (4; 0) წერტილებზე, ე.ი. $k = -\frac{1}{2}$ და b=2. f(x)=$-\frac{1}{2}x + 2$.

22. $y = \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \dfrac{2x(x - 2)}{x - 2} = 2x$, როცა $x \neq 2$. მიიღება წრფე, რომელსაც არ უნდა მივაკუთვნოთ $x=-2$-ის შესაბამისი წერტილი.

23. $y=(2x-3)^2-4(x-1)^2-3=4x^2-12x+9-4x^2+8x-4-3=-4x+2$.

24. ა) $A(a; -2)$ — $-2=3a$ $a=-\dfrac{2}{3}$.

ბ) $B(2a-1; 1{,}5)$ — $1{,}5=3(2a-1)$ $a=0{,}75$.

25. $y=-2x-2{,}5$.
Oy:$x=0$ $y=-2{,}5$ ჩამოკვეთილი მონაკვეთების
Ox:$y=0$ $x=-1{,}25$ სიგრძეებია y ღერძზე — 2,5 x ღერძზე — 1,25.

26. ვიპოვოთ $y=-0{,}5x+1$ და $y=2x-6{,}5$ ფუნქციათა გადაკვეთის წერტილი. ეს წერტილია (3; -0,5) ვიპოვოთ b, თუ $y=-x+b$ გადის (3; -0,5) წერტილზე $b=2{,}5$. საძიებელი ფუნქციაა $y=-x+2{,}5$.

27. ა) წრფეები $y=ax$ და $y=x+2$ გადაიკვეთება, თუ $a\neq 1$, ე. ი. ექნება ერთი ამონახსნი. თუ $a=1$, წრფეები პარალელურია და $x\in\varnothing$.
ბ) თუ $a\neq 6$, წრფეები იკვეთება; თუ $a=6$, წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა – უამრავი ამონახსნი.
გ) $y=(a+1)x$ და $y=5$.
თუ $a=-1$, წრფეები პარალელურია $x\in\varnothing$.
თუ $a\neq -1$, წრფეები იკვეთება.

29. ა) $2x+5y=56 \Rightarrow y = \dfrac{56 - 2x}{5}$.

30. ა) $(a-1)3-3=2a-1 \Rightarrow 3a-3-3=2a-1$.
$a=5$.

31. $6x+18y=54 \Rightarrow x+3y=9$.

x	3	6
y	2	1

3 ინდაური ან 3 ქათამი და 2 ინდაური, ან 6 ქათამი და 1 ინდაური, ან 9 ქათამი

32. ა) $xy=24$. $24=1\cdot24=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6$.

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

ბ) $y=-\dfrac{2}{3}x+10$. $x=3k$

x	3	6	9	12
y	8	6	4	2

დ) $\begin{cases} x-1=1 \\ y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=20 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=20 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (3;10)$

პასუხი: (2;20); (3;10); (5;5); (6;4); (11;2); (21;1).

34. ა) $8\cdot 2-3,5y=9$

$$y=\frac{16-9}{3,5}=2$$

A(2; 2)

36. ვთქვათ, x_0, $y_0\in Z$ და $4x_0-6y_0=7 \Rightarrow 2(2x_0-3y_0)=7$ (1)
$2x_0-3y_0=3,5$. მაგრამ, დაშვების თანახმად $(2x_0-3y_0)\in Z$. ე.ი. $M(x_0,\ y_0)$ წერტილი არ მდებარეობს გრაფიკზე.

38. $\left.\begin{cases} A(3;y) \\ 2x-5y=1 \end{cases}\right) \Rightarrow 2\cdot 3-5y=1 \Rightarrow y=1.$ $\quad A\{3;1\}.$

$(2a-1)x+y=a$ წრფეზე მდებარეობს A(3; 1). ე.ი. $(2a-1)3+1=a \Rightarrow a=\frac{2}{5}$.

39. $\left.\begin{cases} M(x;0) \\ x+y=4 \end{cases}\right) \Rightarrow x+0=4 \Rightarrow x=4.$ $\quad \left.\begin{cases} bx+2y=5 \\ M(4;0) \end{cases}\right) \Rightarrow 4b+2\cdot 0=5 \Rightarrow b=\frac{5}{4}.$

41. ა) $\begin{cases} y=6x-2 \\ y=6x-12 \end{cases};$ $\quad$ ბ) $\begin{cases} y=\frac{5}{7}x-\frac{1}{7} \\ y=-8x+3 \end{cases}.$

42. ა) $\begin{cases} y=-\frac{c}{3}x+\frac{17}{3} \\ y=\frac{2}{5}x-\frac{9}{2} \end{cases}$ $\quad$ 1) ამონახსნი არა აქვს, თუ: $\left.\begin{cases} -\frac{c}{3}=\frac{2}{5} \\ \frac{17}{3}\neq-\frac{9}{2} \end{cases}\right) \Rightarrow c=-\frac{6}{5},$

2) აქვს უამრავი ამონახსნი, თუ: $\left.\begin{cases} -\frac{c}{3}=\frac{2}{5} \\ \frac{17}{3}=-\frac{9}{2} \end{cases}\right) \Rightarrow c\in\varnothing.$

3) აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ: $-\frac{c}{3}\neq\frac{2}{5} \Rightarrow c\neq-\frac{6}{5}.$

51. $\left.\begin{matrix} a=4k+3 \\ a=7n+5 \end{matrix}\right) \Rightarrow 4k+3=7n+5,\ k, n\in N.$

$n=\frac{4}{7}k-\frac{2}{7}$, ე.ი.

$4k:7=m(2);$
$4k=7m+2.$ $\quad$ ე.ი. $4k=2;\ 9;\ \boxed{16} \Rightarrow k=4.$

+7 +7

k	4	11	18	25	32
a	19	47	75	103	131

პასუხი: 19; 47; 75; 103; 131.

55.

	რაოდენობა	წონა	
დიდი ყუთი	x	24x	
პატარა ყუთი	y	19y	

$24x+19y=709$, $x, y \in N$.

$y=-\frac{24}{19}x+\frac{709}{19}$ 709:19=37(6), ამიტომ $24x=19k+6$.

24x ლუწია, ამიტომ k-ც ლუწი იქნება.

$$\overset{+38}{}\ \overset{+38}{}$$

$24x=6;\ 44;\ 82;\ 120.$

$24x=120 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=-\frac{120}{19}+\frac{709}{19}=\frac{589}{19}=31$

	x	y	
	5	31	
+19	24	7	-24

56. $\begin{cases} \text{დედალი } x \longrightarrow 3x \text{ საპეკი} \\ \text{მამალი } y \longrightarrow 5y \text{ საპეკი} \\ \text{წიწილა } 3t \longrightarrow t \text{ საპეკი} \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y+t=100 \\ x+y+3t=100 \\ x_t y_t t \in N \end{cases} \Bigg|\ (-3)$ $\begin{cases} 3x+5y+t=100 \\ -3x-3y-9t=-300 \end{cases}$

$$\overline{2y-8t=-200}$$

$4t-y=100 \Rightarrow y=4t\text{-}100$ და $x=100-y-3t=100-(4t-100)-3t$. ე.ი. $x=200-7t$; $y=4t-100$.

3t	75	78	81	84
y	0	4	8	12
x	25	18	11	4

57. ა) $4x^2-y^2=7 \Rightarrow (2x-y)(2x+y)=7$, რადგან $x, y \in Z$, ამიტომ, 2x-y და 2x+y რიცხვებიც მთელი რიცხვებია, $7=1\cdot7=(-1)(-7)$. ე.ი.

1) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 2x+y=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x+y=-7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x-y=-7 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$.

(2; -3) (2; 3) (-2; -3) (-2; 3)

58. ა) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6 \\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-14 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x}\equiv a \\ \frac{1}{y}\equiv b \end{array} \right|$ $\begin{cases} a+b=6 \\ 3a-5b=-14 \end{cases}$ $\begin{cases} b=4 \\ a=2 \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x}=2 \\ \frac{1}{y}=4 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

ტესტი თვითშემოწმებისთვის

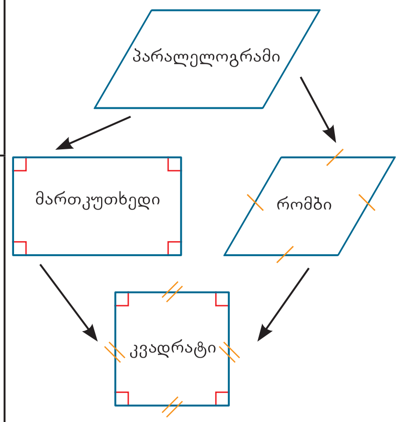
1. ბ; **2.** გ; **3.** გ; **4.** ა; **5.** დ; **6.** ა; **7.** დ; **8.** ა; **9.** ბ; **10.** გ; **11.** გ; **12.** ბ; **13.** გ; **14.** ბ; **15.** დ; **16.** ბ; **17.** ა; **18.** ბ; **19.** გ.

VI თავი

<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: გეომეტრია.</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 15-20</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ოთხკუთხედები</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• ორი სიმრავლეს შორის შეიძლება არსებობდეს შესაბამისობა.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში;
• ორ სიმრავლეს შორის მიკუთვნების დამოკიდებულება შესაძლებელია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით. (მათემატიკური სიმბოლოებით, ეილერის წრეებით, სიტყვიერი დახასიათებით).
• კანონზომიერებაც შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი გეომეტრიულ ფიგურებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური სურათის ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: ოთხკუთხედები, მათი საერთო და განსხვავებული თვისებები. ამა თუ იმ ოთხკუთხედის ნიშანი.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნებები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">კავშირები – სიმრავლეების ელემენტებს შორის შესაბამისობა;
• ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს შესაბამისობა მიუხედავად ელემენტების ბუნებისა.
• კანონზომიერებების აღმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება სიტუაციის აღწერაში, დასკვნების გაკეთებასა და სამყაროს შესწავლაში;</td><td>• განმარტება; პარალელოგრამი; მართკუთხედი; რომბი, კვადრატი.
• თვისებები; პარალელოგრამი; მართკუთხედი; რომბი, კვადრატი.
• ნიშნები; პარალელოგრამი; მართკუთხედი; რომბი, კვადრატი.</td><td>1. როგორი სხვადასხვა გზებით შეიძლება კავშირების (დამოკიდებულების) წარმოდგენა?
2. რით განსხვავდება ნიშანი თვისებისაგან?
3. როგორი მიმართებებია ამ ოთხკუთხედებს შორის?
4. რას ნიშნავს ეკვივალენტური ფორმები?
5. რამდენი სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით შეიძლება წარმოვადგინოთ ფიგურებს შორის მიმართებები?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში არსებული სხეულების ზედაპირები აღიწერება ბრტყელი ფიგურებით. შესაბამისად, ამ ფიგურების თვისებები განსაზღვრავს სხეულების თვისებებს.

კომპლექსური დავალება
დააკვირდით სქემას, სადაც მოცემულია ოთხკუთხედებს შორის მიმართებები. მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება; ნაშრომის პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ:</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს, რომ გადახაზონ მოცემული სქემა და მონიშვნების გამოყენებით მასზე გადაიტანონ მართკუთხედის და რომბის საკუთარი თვისებები.
საკვანძო შეკითხვა: ა) დააკვირდით სქემას და დაადგინეთ, ამ ფიგურებიდან რომლის განმარტებაა შესაძლებელი სხვა ფიგურის საშუალებით.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა;
• სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით. (რაც ხელს უწყობს დამოკიდებულების უკეთ გააზრებასა და ანალიზს).
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;

მოდელი/ მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს სქემატურად, ნახაზისა და შესაბამისი მონიშვნების საშუალებით.
• მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td>
<td>ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;
აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:
• რა ფიგურაა პარალელოგრამი?
• რით განსხვავდება მართკუთხედი პარალელოგრამისაგან?
• რით განსხვავდება რომბი პარალელოგრამისაგან?
• აქვს თუ არა კვადრატს საკუთარი თვისებები?
• შესაძლებელია თუ არა, რომ კვადრატი განვმარტოთ რომბის საშუალებით?</td>
<td rowspan="3">• წარმოადგინეთ კავშირები
• აღწერეთ მოცემული ფიგურები.
• მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.


საკუთარი თვისებები;
• მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია;
• რომბის დიაგონალები ტოლია;
• რომბში დიაგონალები ბისექტრისებია.

იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე:
https://teacher.desmos.com/activity-builder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);
აქტივობა 2: მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას დაადგინონ:
ა) აქვს თუ არა მართკუთხედს ისეთი თვისებები, რაც არა აქვს პარალელოგრამს და პირიქით;
ბ) აქვს თუ არა რომბს ისეთი თვისებები, რაც არა აქვს პარალელოგრამს და პირიქით;
გ) აქვს თუ არა კვადრატს ისეთი თვისებები, რაც არა აქვს მართკუთხედს და პირიქით;
დ) აქვს თუ არა კვადრატს ისეთი თვისებები, რაც არა აქვს რომბს და პირიქით;
ე) აქვს თუ არა კვადრატს ისეთი თვისებები, რაც არა აქვს პარალელოგრამს და პირიქით.
კვლევა:
ა) მოსწავლეებმა, სქემით გადმოცემული მიმართებები უნდა გამოსახონ ეილერის წრეებით.
ბ) მოსწავლეებმა, ზემოხსენებული ფიგურების თვისებების მიხედვით უნდა ჩამოაყალიბონ მართკუთხედის, რომბის და კვადრატის ნიშნები.</td>
</tr>
<tr>
<td>ეტაპი IV. კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.
საკვანძო შეკითხვა: როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს?
აქტივობები:
მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს.</td>
</tr>
</table>

	კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები) **ეტაპი I.** მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:** **ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.	კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი თავი 6	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება.

1. მრავალკუთხედები

სასურველია, მასწავლებელმა შეახსენოს ჩაზნექილი და ამოზნექილი მრავალკუთხედები. ამასთან განუმარტოს, რომ შემდგომში, მრავალკუთხედში ვიგულისხმებთ მხოლოდ ამოზნექილ მრავალკუთხედს.

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მრავალკუთხედის კუთხეების, გვერდებისა და დიაგონალების დასახელება. უნდა იცოდეს რამდენი დიაგონალი გაივლება მრავალკუთხედის ერთი წვეროდან და რამდენი დიაგონალი აქვს n-კუთხედს. უნდა იცოდეს მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის ფორმულა. ამის გათვალისწინებით უნდა შეეძლოს წესიერი n-კუთხედის კუთხის გრადუსული ზომის პოვნა კონკრეტული n-ისთვის.

ამოხსნები, მითითებები:

1. მაგალითისთვის განვიხილოთ ნებისმიერი ხუთკუთხედი. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, $A_1A_4<a_1+a_2+a_3$, ანალოგიურად $A_1A_5<a_1+a_2+a_3+a_4$. ნებისმიერი მრავალკუთხედისათვის მსჯელობა ანალოგიურია.

2. $x+2x+3x+4x+5x=60$, საიდანაც $x=4$.

3. ნებისმიერი წვეროდან გაივლება $n–3$ დიაგონალი, ე.ი. დიაგონალების რაოდენობა იქნება $\frac{n(n-3)}{2}$.

4. $120n=180(n–2)$ $n=6$.

5. შიგა კუთხე ტოლია 150-ის, ე.ი. $150n=180(n-2)$ $n=12$.

6. $\frac{n(n-1)}{2}$.

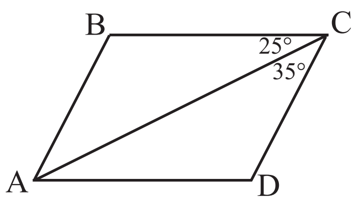
7. $n–3=7$ $n=10$.

2. პარალელოგრამი. პარალელოგრამის თვისებები

ამოხსნები, მითითებები:

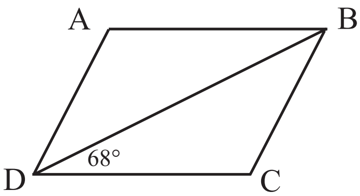
3. პარალელოგრამის მახვილი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი , მაშინ ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა იქნება $\alpha+50°$. $\alpha+\alpha+50°=180° \Rightarrow \alpha=65°$, $\beta=115°$.

4. $\angle A=\angle A=25°+35°=60°$
$\angle B=\angle D=180° - 60° =120°$.



5. ა) მახვილი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი , მაშინ ბლაგვი კუთხეა 4α.
$\alpha+4\alpha=180° \Rightarrow \alpha=36°;\ \beta=144°;$
ბ) $\alpha:\beta=3:7 \Rightarrow \alpha=3x;\ \beta=7x.$
$3x+7x=180° \Rightarrow x=18°.$
$\alpha=3\cdot180=54$ და $\beta=7\cdot18°=126°.$

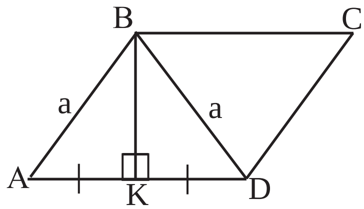
6. $\angle ABC=\angle ADC=84°$
$\angle ADB=84°-68°=16°$
$\angle BAC=180°-84°=96°.$



8. a) $AB=CD\equiv a;\ BC=AD=a+25.$
$AB+BC=a+a+25=152:2 \Rightarrow 2a+25=76 \Rightarrow 2a=51 \Rightarrow a=25{,}5.$
$AB=25{,}5$სმ და $BC=50{,}5$სმ.

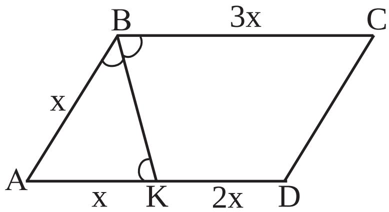
9. განვ. ΔABD. ცხადია $AB=BD\equiv a$.
$AD\equiv b$.

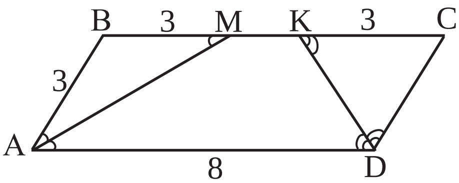
$$\left.\begin{aligned}P_{ABCD} &= 2a + 2b = 3{,}8\\ P_{\Delta ABD} &= 2a + b = 3\end{aligned}\right\} \Rightarrow b=0{,}8 \text{ და } a = (3-0{,}8):2 = 2{,}2:2 = 1{,}1.$$



10. $\angle AKB=\angle CB$ ($BC\|AD$, BK მკვეთია)
განვ. ΔABK. $\angle B=\angle K$. ე.ი. $\angle AB=AK=x$
$P=8x=60 \Rightarrow x=7{,}5.$
$AB=CD=x=7{,}5$ სმ.
$BC=AD=3x=22{,}5$ სმ.

$8x=60 \Rightarrow 2x=15$

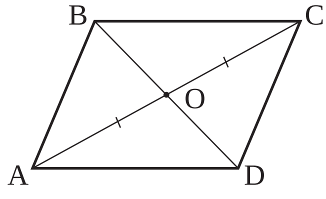




11. $\angle BAM=\angle\ BMA \Rightarrow AB=MB=3$
$\angle CKD=\angle\ KDC \Rightarrow KC=CD=3$
$MK=8-6=2.$
$BM=KC=3$სმ; $MK=2$სმ.

12. $AB=BE=9$სმ; $EC=15-9=6$სმ.

14. A და C წერტილები სიმეტრიულია O ცენტრის მიმართ ,ე.ი .O ცენტრის მიმართ სიმეტრიით A წერტილი გადადის C წერტილში. ანალოგიურად, B წერტილი გადადის D წერტილში.
ე.ი. AB მონაკვეთი გადადის CD მონაკვეთში, BC კი DA მონაკვეთში.
რ.დ.გ.



16. x, მაშინ ობობა იყო $8-x$. $6x+8(8-x)=54 \Rightarrow 6x+64-8x=54 \Rightarrow 2x=10$ $x=5$.
იყო 5 ხოჭო და 3 ობობა.

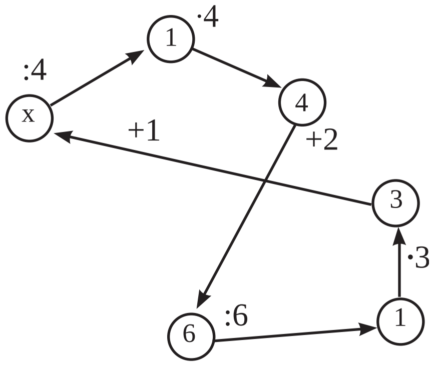
17.

$(x:4\cdot4+2):6\cdot3+1=x$

$(x+2):2=x-1$

$x+2=2x-2$

$x=4.$



18. $x+y=3(x-y)$

$(x+y)\cdot2=xy$

$x+y=3x-3y \Rightarrow 4y=2x \Rightarrow \quad x=2y$

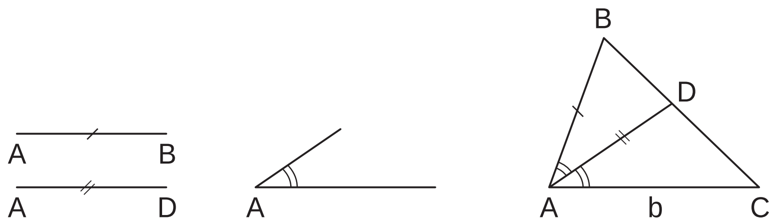
$3y\cdot2=2y^2 \Rightarrow y=3 \quad\quad x=6.$

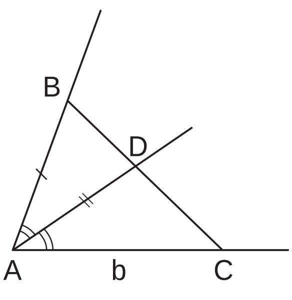
3. სამკუთხედის აგება

სასურველია მასწავლებელმა მოსწავლეებს შეახსენოს ან დავალება მისცეს 7 კლასის სახელმძღვანელოში განხილული აგების ამოცანები

ამოხსნები, მითითებები:

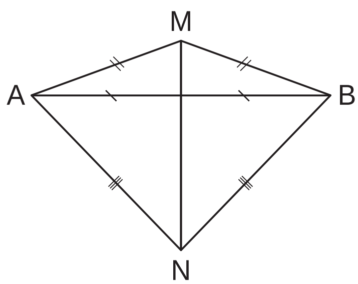
1. ააგეთ სამკუთხედი კუთხით, ამ კუთხის მიმდებარე გვერდით და ამ კუთხის ბისექტრისით.





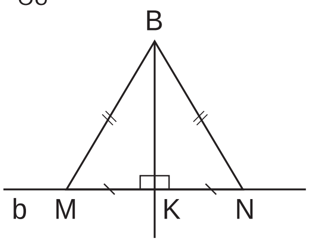
აგება: ავიღოთ A კუთხე. გავავლოთ მისი ბისექტრისა და A წერტილიდან გადავდოთ AD-ს ტოლი მონაკვეთი.
კუთხის ერთ-ერთ გვერდზე A წერტილიდან გადავდოთ AB-ს ტოლი მონაკვეთი. გავავლოთ BD სხივი. ამ სხივის კუთხის მეორე გვერდთან კვეთის წერტილი იქნება სამკუთხედის C წვერო.

2. შემოვხაზოთ წრეწირები A და B ცენტრებით ერთმანეთთან გადაკვეთამდე (M და N წერტილებში).
ცხადია AM=MB და AN=NB, მაშასადამე M და N წერტილები მდებარეობენ AB მონაკვეთის შუამართობზე. M და N წერტილები შევაერთოთ.

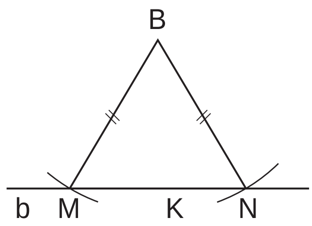


3. B წერტილიდან l წრფეზე დაუშვით მართობი

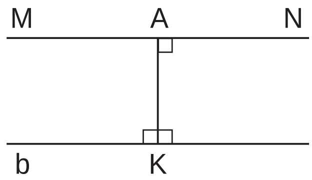
აგება:



B ცენტრით შემოვხაზოთ წრეწირი b წრფესთან გადაკვეთამდე. ცხადია, B წერტილი მდებარეობს MN-ის შუამართობზე. ამის მერე ავაგებ MN მონაკვეთის შუამართობს. იხილეთ ამოცანა 2.



4. A წერტილზე გაავლეთ b წრფის პარალელური წრფე.



აგება:

აგება: A წერტილიდან b წრფეზე დავუშვათ მართობი (იხ. ამოცანა 3) AK სხივზე, მისი სათავიდან გადავდოთ 90˚-იანი კუთხე.

4. პარალელოგრამის ნიშნები

ამოხსნები, მითითებები:

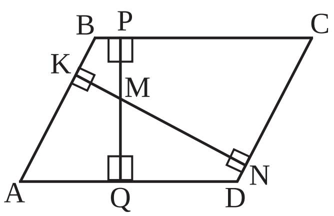
1. $\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle C\\ \angle B=\angle D\end{array}\right) \Rightarrow$ ABCD პარალელოგრამია $\Rightarrow$ AB=CD=5 სმ.

2. $\left.\begin{array}{l}AO=OC\\ BO=OD\end{array}\right) \Rightarrow$ ABCD პარალელოგრამია $\Rightarrow P=2(AD+BC)=2\cdot 17=34$ სმ.

3. $\left.\begin{array}{l}AB=CD\\ AB\parallel CD\end{array}\right) \Rightarrow$ ABCD პარალელოგრამია $\Rightarrow \angle A=180°-\angle B=80°$.

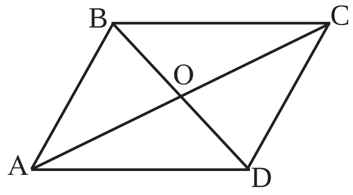
4. $\left.\begin{array}{l}BE=ED\\ BE\parallel ED\end{array}\right) \Rightarrow$ BEDF პარალელოგრამია.

5.



$MP+MQ+MK+MN=h_1+h_2$.

6. ა) ავაგოთ ABD სამკუთხედი სამი გვერდით, D წერტილიდან გავატაროთ AD-ს, ხოლო D-დან კი AB-ს პარალელური წრფეები ერთმანეთთან გადაკვეთამდე.

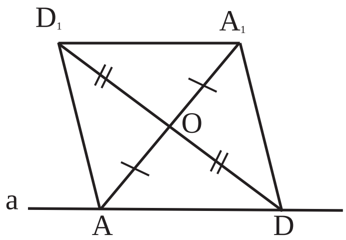


ბ) AO=$\frac{1}{2}$AC; OD=$\frac{1}{2}$BD. ავაგოთ AOD სამკუთხედი სამი გვერდით. O წერტილიდან გადავზომოთ OC=OA და OB=OD მონაკვეთები. B წერტილი შევაერთოთ A-სთან, C კი D-სთან.

გ) მითითება: ავაგოთ ABD სამკუთხედი ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით.

დ) მითითება: ავაგოთ AOD სამკუთხედი ორი AO და OD გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით.

8.



a წრფეზე ავილოთ ორი A და D წერტილი. ავაგოთ O ცენტრის მიმართ. A და D წერტილების სიმეტრიული A_1 და D_1 წერტილები.

მიღებული AD_1A_1D ოთხკუთხედი პარალელოგრამია I ნიშნის თანახმად. $a \| A_1D_1$. რ.დ.გ.

9. განვ. ABCD ოთხკუთხედი. O დიაგონალების კვეთის წერტილია. რადგან O ოთხკუთხედის სიმეტრიის ცენტრია, ამიტომ AO=OC და BO=OD. ე.ი. ABCD პარალელოგრამია I ნიშნის თანახმად.

12. დაშტრიხული ფიგურის ფართობი განვიხილოთ, როგორც $S_{AOD}-S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=28$.

5. პარალელოგრამის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

1. $S=9\cdot 10=90$სმ^2.

2. $20=5\cdot h \Rightarrow h=4$სმ. $S=a\cdot h_a=3h_a\cdot h_a=48 \Rightarrow h_a=4$სმ.

3. $h_a\cdot 3=a$
a=12სმ.

6. $a+b=35$
$2a=5b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=5x \\ b=2x \end{matrix}\right) \Rightarrow 2x+5x=35 \Rightarrow x=5.$

b=10სმ; a=25სმ; $S=a\cdot 2=50$სმ^2.

7. a=3x; b=4x; c=5x. უდიდესი გვერდი ჰიპოტენუზაა. ე.ი. $5x=2\cdot15 \Rightarrow x=6$.

$S=\frac{1}{2}a\cdot b=6x^2=6\cdot36=216$.

S=216სმ^2.

8. ბექამ აიღო ქლიავის მესამედი — 4 ცალი, ე.ი. მას დახვდა 12 ქლიავი, იმდენი, რამდენიც დატოვა ნინომ. ეს კი იმ რაოდენობის $\frac{2}{3}$-ია, რაც მას დახვდა. ე.ი. ნინოს დახვდა 18 ქლიავი, რაც იმ რაოდენობის $\frac{2}{3}$-ია, რაც დახვდა თეას. ე.ი. თეას დახვდა 27 ქლიავი. დედამ დატოვა 27 ქლიავი.

9. $(x^2+4)(x+12)(x^2+6)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x+12=0 \\ x+6=0 \end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=-6 \end{array}\right)$$

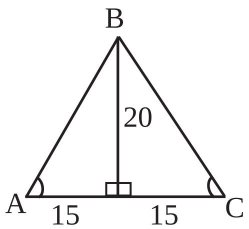
6. სამკუთხედის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

2. $\left.\begin{array}{l} 2S=ab \\ 2S=c\cdot h_c \end{array}\right) \Rightarrow a\cdot b=c\cdot h_c$.

3. $h_c.10=5\cdot20 \Rightarrow h_c=10$სმ.

4.



BC=25დმ.

$BC\cdot h_a=30\cdot20 \Rightarrow 25\cdot h_a=30\cdot20 \Rightarrow h_a=24$დმ.

5. $16\cdot33=22h_a \Rightarrow h_a=24$სმ.

7. კათეტის სიგრძე აღვნიშნოთ x-ით. $x^2+x^2=14^2 \Rightarrow x^2=14\cdot7$.

$S=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\cdot14\cdot7=49$სმ^2.

9. კათეტი და ჰიპოტენუზა აღვნიშნოთ a და c-თი. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=\frac{41\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2+c^2=41$.

$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4} \Rightarrow c^2-a^2=9$.

მიღებული ტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ $2c^2=50 \Rightarrow c=5$.

$a^2=16 \Rightarrow a=4;\ c=5;\ b=3$.

10. $S_{სრ}=4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=10^2\sqrt{3}=100\sqrt{3}$.

11. $S=\cancel{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}=a^2\sqrt{3}=12\sqrt{3}\Rightarrow a=2\sqrt{3}$.

16. 22+979=1001.

7. სამკუთხედის შუახაზი

ამოხსნები, მითითებები:

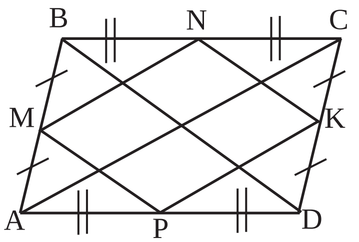
2. $a:b:c=3:4:5 \Rightarrow a=3x$; $c=5x$.
$3x+4x+5x=60 \Rightarrow 12x=60 \Rightarrow x=5 \Rightarrow a=15$; $b=20$; $c=25$.
საძიებელი სამკუთხედის პერიმეტრია 60:2=30სმ.

გვერდები კი $\frac{a}{2}=7{,}5$; $\frac{b}{2}=10$ და $\frac{c}{2}=12{,}5$.

3. რადგან ფუძის პარალელური შუახაზის სიგრძეა 3 სმ, ე.ი. ფუძის სიგრძეა 6სმ. გვერდების კი (16-6):2=5სმ.

4. მიღებული ოთხკუთხედი მართკუთხედია. პერიმეტრი კი $2\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right)=7$სმ.

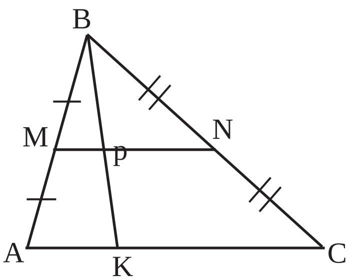
5.



MN მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუახაზია, ე.ი. $MN=\frac{AC}{2}=12$. ΔACD-დან ანალოგიურად მივიღებთ, რომ MP=NK=5. MNKP ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია. ე.ი. MNKP პარალელოგრამია. P=2(12+5)=34სმ.

6. M, N და K წერტილების შეერთებით მივიღებთ MNK სამკუთხედს. სამკუთხედის წვეროებიდან გავავლოთ მოპირდაპირე გვერდების პარალელური წრფეები ერთმანეთთან გადაკვეთამდე. ამგვარად მიღებული სამკუთხედი იქნება საძიებელი ABC სამკუთხედი.

7.



MN შუახაზია. ე.ი. MN||AC. განვ. ΔABK. AB გვერდის M შუაწერტილიდან გავლებულია ფუძის პარალელური წრფე, ე.ი. MP შუახაზია. მაშასადამე, BP=KP.

8. წინა ამოცანის თანახმად (იხ. ნახაზი), შუახაზით სიმაღლე გაიყო ორ ტოლ მონაკვეთად. მაშასადამე, $S_{\Delta MBN}=\frac{1}{2}BP\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{BK}{2}\cdot\frac{AC}{2}=\frac{1}{4}S_{ABC}$. ანალოგიურად $S_{AMK}=S_{KNC}=S_{MBN}=\frac{1}{4}S_{ABC}$.

$S_{MNK}=S_{ABC}-3\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABC}=5$ სმ^2.

9. $S_{ABC}=4\cdot S_{MNB}=12$სმ^2.

10. მითითება: გაავლეთ სამივე შუახაზი. ამგვარად, მიღებული ოთხივე სამკუთხედი ტოლია (გვერდების სიგრძეებია $\frac{a}{2}$; $\frac{b}{2}$ და $\frac{c}{2}$, სადაც a, b და c თავდაპირველი სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია). ცხადია, ეს ყოველთვისაა შესაძლებელი.

11. ა) $x\cdot\frac{150}{100}\cdot\frac{50}{100}=1,5\cdot0,5x=0,75x$. ე.ი. შემცირდა 25%-ით.

12. იყო a:b, გახდა $1,5a:(0,5\cdot b)=3\cdot a:b$. ე.ი. განაყოფი გაიზარდა 3-ჯერ.

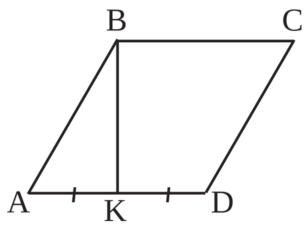
13. რადგან 10 სთ-ში ივსება, ე.ი. I მილით 1 სთ-ში ჩადის 1800ლ:10=180ლ. II მილით კი საათში გაედინება 1800ლ:15=120ლ. ე.ი. როცა ორივე მილი გახსნილია, საათში ჩადის 180ლ–120ლ=60ლ. 5 საათში ჩავა 5·60ლ=300ლ.

8. რომბი, რომბის თვისებები

ამოხსნები, მითითებები:

1. $9x=180°$ $x=20°$. $80°$; $100°$

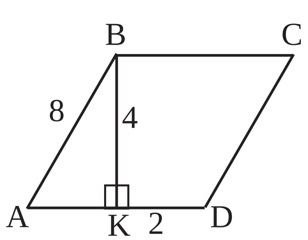
6.



$AK=\frac{AB}{2}$. ე.ი. $\angle A=60°$.

7. რომბის გვერდია 2 სმ, სიმაღლე კი - 1 სმ-ია. ე.ი. კუთხე 30°-ია.

8. a = 8 სმ.
განვ. ΔABK. $\angle K=90°$, $BK=\frac{1}{2}AB=4$.



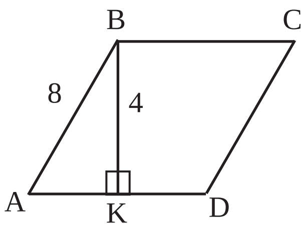
9. მიღებული ოთხკუთხედი რომბია, რადგან დიაგონალები ერთმანეთით შუაზე იყოფა და ურთიერთმართობულია.

10. რომბი პარალელოგრამის კერძო შემთხვევაა. $a\cdot h_a=b\cdot h_b$ ფორმულიდან მივიღებთ $ah_a=ah_b \Rightarrow h_a=h_b$.

14. ვთქვათ არის x სკამი და y სპორტსმენი. $\left.\begin{matrix} 6(x-1)+3=y \\ 5x+4=y \end{matrix}\right) \Rightarrow 6x-3=5x+4 \Rightarrow x=7.\ y=39.$

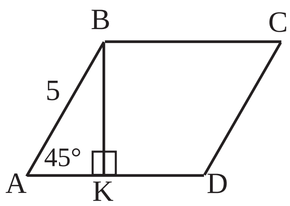
9. რომბის ნიშნები. რომბის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

1. 

$a=8$სმ. განვ.: ΔABK. $\angle K=90°$, $BK=\frac{1}{2}AB=4$; $S=8\cdot4=32$,

2. $s_{რ}=\frac{1}{2}d_1d_2=\frac{1}{2}\cdot5\cdot9=22,5$.

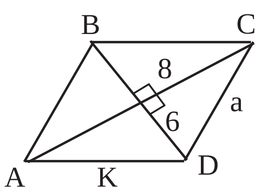
3. 

განვ. ΔABK. $\angle A=45° \Rightarrow AK=BK\equiv h$. $2h^2=25 \Rightarrow h=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$S=\frac{25\sqrt{2}}{2}=2,5\sqrt{2}$

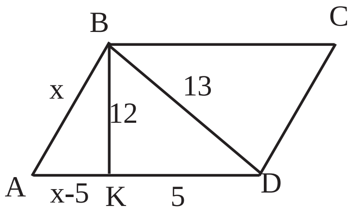
4. $6\alpha=180° \Rightarrow a=30° \Rightarrow h=\frac{a}{2}$. $S=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{a^2}{2}$.

5. $\alpha=30° \Rightarrow a=2h=20$სმ. $S=a\cdot h=200$სმ^2.

6. 

$a=10$ $\left.\begin{matrix} S=\frac{1}{2}d_1d \\ S=a\cdot h \end{matrix}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot16\cdot12=10h \Rightarrow h=9,6$სმ.

7.



KD=5$\Rightarrow$AK=x–5.
განვ.: ΔABK. $x^2=(x-5)^2+144 \Rightarrow x^2=x^2-10x+15+144 \Rightarrow$
$10x=169 \Rightarrow x=16{,}9$.
S=12·16,9=202,8სმ^2.

8. $\left[\begin{array}{l} S_{რ}=18h \\ S_{კვ}=144 \end{array}\right) \Rightarrow h=8$

9. ცხადია, რომბის მახვილი კუთხე 60˚-ია.

$S_{რ}=5\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

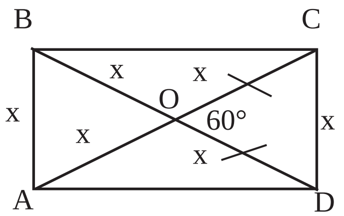
10. $d_1=3x$; $d_2=4x$

$S=\frac{1}{2}\,3\cdot x\cdot 4x=24 \Rightarrow x=2$

10. მართკუთხედი, კვადრატი

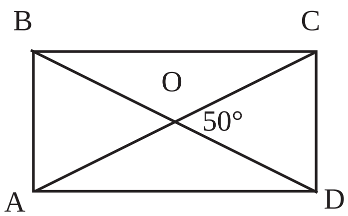
ამოხსნები, მითითებები:

1.



ΔCOD. CO=OD≡x, $\angle COD=60° \Rightarrow$ CD=x.
$6x=3{,}6 \Rightarrow x=0{,}6$. AC=BD=2x=1,2.

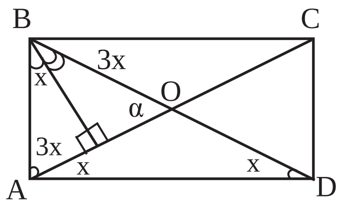
2.



განვ.: $\left.\begin{array}{l} \triangle COD.\ OC=OD \\ \angle COD=50° \end{array}\right) \Rightarrow\ \angle OCD=\angle CDO=65°$.

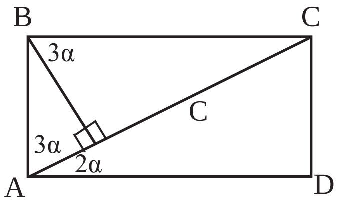
$\angle BDA+\angle CDO=90° \Rightarrow \angle BDA=25°$.

4.



x+3x=90° $\Rightarrow$ x=22,5°.განვ. ΔAOD. α გარე კუთხეა. ე.ი. α=2x=45°.

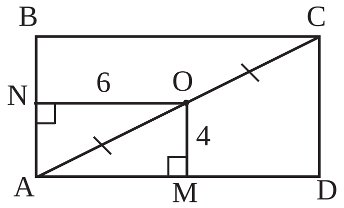
5.



$5\alpha=90° \Rightarrow \alpha=\frac{90°}{5}=18°$.

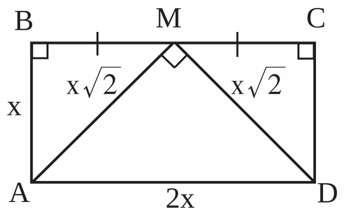
$2\alpha=36°$ და $3\alpha=54°$.

6.



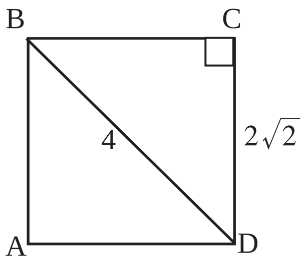
OM=4სმ $\Rightarrow$ AB=8სმ.
ON=6სმ $\Rightarrow$ BC=12სმ.
$P=2\cdot(8+12)=40$სმ.

7.



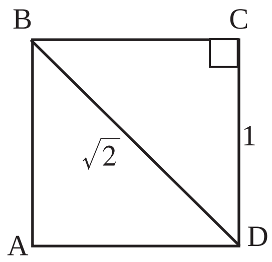
$P_{ABCD}=24 \Rightarrow AB+BC=12$.
$BM=\frac{x}{2}=x$
$(\Delta ABM=\Delta DCM) \Rightarrow \angle BMA=\angle CMD=45°$.
ე.ი. AB=BM=x.

8.



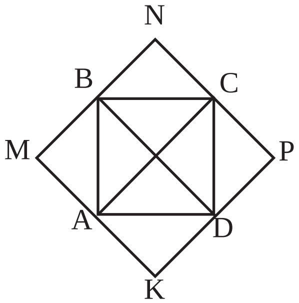
განვ.: ΔBCD, $\angle C=90°$. $BD=4 \Rightarrow CD=2\sqrt{2}$.
CD არის მეორე კვადრატის დიაგონალი. მისი გვერდი აღვნიშნოთ b-თი. $b^2+b^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2b^2=4\cdot 2 \Rightarrow b=2a$.

9.



$CD=1 \Rightarrow BD=\sqrt{2}$. BD მეორე კვადრატის გვერდია.
მისი დიაგონალი აღვნიშნოთ d-თი. $d^2=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^{\,2} \Rightarrow d^2=4 \Rightarrow d=2$.

10.



MNPK კვადრატია, MN=AC=12სმ.
$P=4\cdot 12$სმ=48სმ

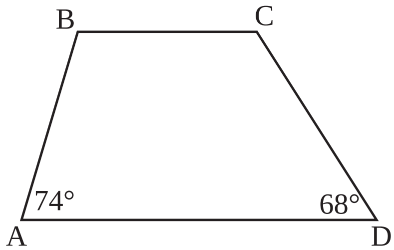
11. სიმეტრიის ცენტრია დიაგონალების კვეთის წერტილი. სიმეტრიის ღერძი არა აქვს.

12. კვადრატის სიმეტრიის ცენტრია დიაგონალების კვეთის წერტილი. სიმეტრიის ღერძია დიაგონალები და გვერდების შუამართობები. სულ 4 ცალი.

11. ტრაპეცია, ტრაპეციის შუახაზი

ამოხსნები, მითითებები:

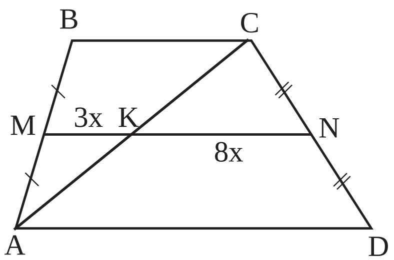
1. სასურველია გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე, რომ ტრაპეციის ფერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180·-ია.



(AB მკვეთია. BC||AD)
$\angle B=180°-74°=106°$, $\angle C=180°-68°=112°$.

2. ΔABD-ში შუამონაკვეთის სიგრძეა 21 სმ, ე.ი. AD=42სმ. ΔBCD-დან ანალოგიურად მივიღებთ, რომ BC=2·6სმ=12სმ.

3.



$5x=10 \Rightarrow x=2$.
განვ. ΔABC. $MK=3x \Rightarrow BC=6x=12$.
AD=16x=32.

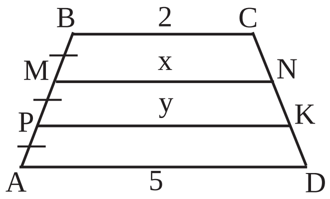
პასუხი: BC=12სმ და AD=32სმ.

4. შუამონაკვეთის სიგრძეები აღვნიშნოთ x და y-ით. მაშინ ფუძეების სიგრძეებია 2x და 2y. $x+y=8$ და $x-y=2 \Rightarrow x=5$ და y=3.ფუძეების სიგრძეებია 10სმ და 6 სმ.

5. a=2x; b=3x. $\frac{a+b}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x+3x}{2}=5$.   x=2.
a=4მ;   b=6მ.

6. a=b+4 და $\frac{a+b}{2}=7 \Rightarrow \frac{b+b+4}{2}=7 \Rightarrow b=5$სმ. a=9სმ.

7.



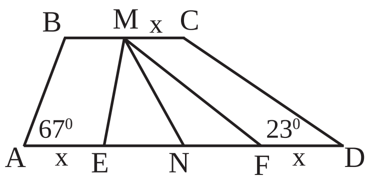
განვ. PBCK ტრაპეციის MN შუახაზია,

ე.ი. $x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y=2x-2$ (1).

AMND ტრაპეციიდან მივიღებთ $y = \frac{x+5}{2}$,

საიდანაც (1)-ის გათვალისწინებით $2x-2=\frac{x+5}{2} \Rightarrow 4x-4=x+5 \Rightarrow x=3$ და $y=4$.

8.



M წერტილიდან გავავლოთ ME||AB; MF||CD. $\angle EMF=90°$ AE=BM=MC=FD=x.

MN მედიანაა. $MN=\frac{AD-2x}{2}=\frac{AD-BC}{2}$, ე.ი. AD–BC=6;

AD+BC=14, საიდანაც AD=10; BC=4.

ტესტი

1. გ; **2.** გ; **3.** დ; **4.** ბ; **5.** გ.

12. მართკუთხა ტრაპეცია, ტოლფერდა ტრაპეცია

ამოხსნები, მითითებები:

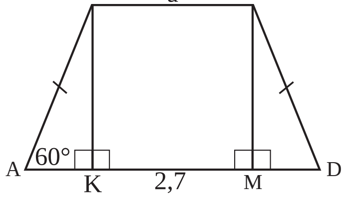
1. AM=16სმ და MD=36სმ. შუახაზის სიგრძე ტოლია MD=36სმ. BC=a და AD=b. $\frac{a+b}{2}=36 \Rightarrow a+b=72 \Rightarrow b=72-a$.

$AM=\frac{b-a}{2}=\frac{72-a-a}{2}=16 \Rightarrow 72-2a=32 \Rightarrow a=20$.

პასუხი: მცირე ფუძის სიგრძეა 20სმ, შუახაზის კი 36სმ.

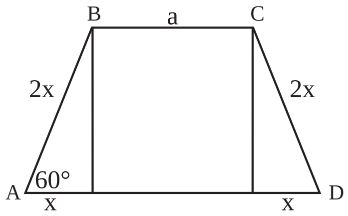
2. $\alpha-\beta=40°$, $\alpha+\beta=180° \Rightarrow \alpha=110°$ და $\beta=70°$.

3.



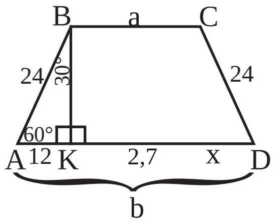
განვ. ΔABK. $\angle A=60° \Rightarrow \angle B=30° \Rightarrow AK=\frac{AB}{2}=0{,}5$.
ანალოგიურად $\Delta CMD \Rightarrow MD=0{,}5$.
BC=KM=2,7–(0,5+0,5)=1,7.

პასუხი: BC=1,7სმ.

4. 

$x=\dfrac{49-15}{2}=\dfrac{34}{2}=17$

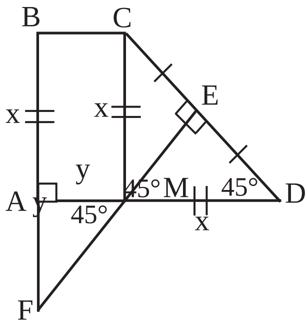
AB=2x=34. P=15+49+2·34=132სმ.

5. 

$\Delta ABK \Rightarrow AK=\dfrac{AB}{2}=12$. BC=a; AD=b $\Rightarrow \dfrac{b-a}{2}=12 \Rightarrow$ b-a=24.

b+a=43. ე.ი. $b=\dfrac{67}{2}$; $a=\dfrac{19}{2}$.

6. $\dfrac{a+b}{2}=30$ და $\dfrac{a-b}{2}=6 \Rightarrow$ a+b=60 და a–b=12 $\Rightarrow$ a=36 და b=24.

7. 

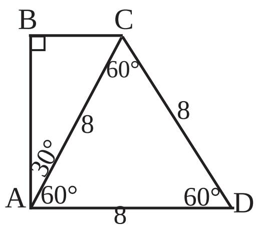
AD=17.

CD მონაკვეთის EF შუამართობი AD გვერდს კვეთს M წერტილ-ში. განვ. ΔCMD. MK მედიანაა და სიმაღლე, ე.ი. CM=AD=x. $\angle D=\angle C=45° \Rightarrow \angle CMD=90°$.

განვ. ΔEMD. $\left.\begin{matrix}\angle D=45°\\ \angle E=90°\end{matrix}\right) \Rightarrow \angle EMD=45°, \angle AMF=45° \Rightarrow AM=AF=y.$

BF=x+y=AD=17.

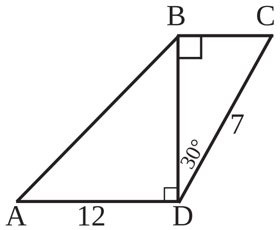
(ვერტიკალური კუთხეები). განვ. ΔAMF, A=90°, $\angle AMF=45° \Rightarrow \angle$ AM=AF=y. BAMC მართკუთხე-დიდან BA=x.

8. 

ცხადია, ეს დიაგონალი ვერ იქნება BD დიაგონალი, რადგან ΔBAD მართკუთხა იქნება, ხოლო BCD კი ბლაგვკუთხა.

განვ. $\left.\begin{matrix}\Delta BAC.\ AC=8\\ \angle B=90°\\ \angle A=90°\end{matrix}\right) \Rightarrow BC=4.$ შუახაზის სიგრძეა $\dfrac{BC+AD}{2}=\dfrac{4+8}{2}=6$სმ.

9.



$\angle ADC=120° \Rightarrow \angle BDC=30°$
განვ. ΔBDC. $\angle B=90°$. $\Bigg) \Rightarrow BC=\frac{7}{2}$.

შუამონაკვეთის სიგრძეა $\frac{BC+AD}{2}=\frac{3,5+12}{3}=\frac{15,5}{2}$=7,75.

10. ეს ოთხკუთხედები პარალელოგრამებია.

11. გაფერადებული Δ-ის კათეტების სიგრძეებია 1 და 2. ე.ი. ჰიპოტენუზის სიგრძეა $\sqrt{5}$. მიიღება კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა $2\sqrt{5}$. $P=8\sqrt{5}$.

12. ცხადია, თუ ტრაპეციას აქვს სიმეტრიის ღერძი, ის გადის ფუძეების შუაწერტილებზე, ე.ი. ABCD ტრაპეციაში ($BC \| AD$) $B \to C$ და $A \to D$. ე.ი. $AB \to CD$ $AB=CD$. რ.დ.გ.

13. 22 დღე არის 3 სრული კვირა და კიდევ ერთი დღე. თუ გვინდა, რომ თანხა იყოს უდიდესი, ის ერთი დღე უნდა იყოს კვირა, რადგან კვირაობით უხდიან ყველაზე მეტ თანხას — 30 ლარს. კვირაში უხდიან $5\cdot10+20+30=100$ ლარს. 22 დღეში აიღებს $3\cdot100+30=330$ ლარს.

14. $x+\frac{60x}{100}=80$ $x=50$;   50; 30.

15. სპექტაკლზე მოვიდა $\frac{\overset{15}{\cancel{60}}\cdot\overset{3}{\cancel{75}}}{\underset{4}{\cancel{100}}}$=45 ბავშვი. ცარიელი დარჩება 64–45=19 სკამი.

13. ტრაპეციის ფართობი

ამოხსნები, მითითებები:

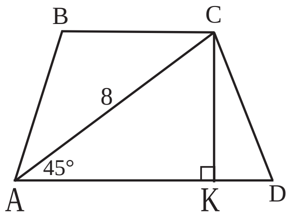
1. $S=\frac{a+b}{2}\cdot h \Rightarrow 225=\frac{10+35}{2}\cdot h \Rightarrow \overset{5}{\cancel{225}}=\frac{\cancel{45}}{2}\cdot h \Rightarrow h=10$.

2. $200=\frac{a+26}{2}\cdot 10 \Rightarrow a+26=40 \Rightarrow a=14$.

3. $400=\frac{a+b}{2}\cdot 20 \Rightarrow \frac{a+b}{2}=20$. შუახაზის სიგრძეა $\frac{a+b}{2}$=20სმ.

4. $a:b=4:5 \Rightarrow a=4x$ და $b=5x$. $36=\frac{4x+5x}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} \Rightarrow 9x=36 \Rightarrow x=4$. $a=16$სმ და $b=20$სმ.

5.

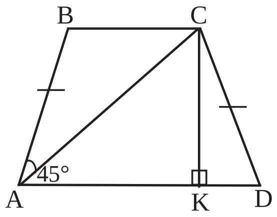


$$\left.\begin{array}{l}\text{განვ.}\quad \Delta ACK\\ \angle A=45°\\ \angle K=90°\\ AC=8\end{array}\right\} \Rightarrow AK=CK=4\sqrt{2}.$$

$S=AK\cdot CK=4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=32.$

$S=32$სმ^2.

6.

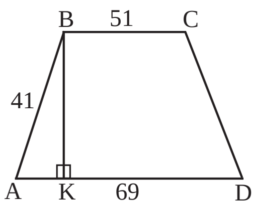


$AD=a;\ BC=b;\ AK=\dfrac{a+b}{2}=10.$

$S_{ABCD}=AK\cdot CK=100.$

პასუხი: $S=100$სმ^2.

7.

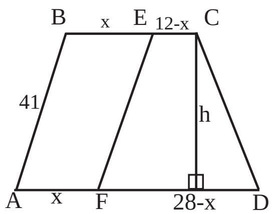


$AK=\dfrac{AD-BC}{2}=9.$

განვ. $\Delta ABK.\ 41^2=9^2+h^2 \Rightarrow (41-9)(41+9)=h^2.$

$h=\sqrt{32\cdot 50} \Rightarrow h=4\cdot 2\cdot 5=40.$

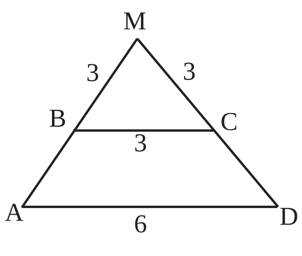
9.



ABEF პარალელოგრამს და FECD ტრაპეციას ტოლი სიმაღლე აქვთ.

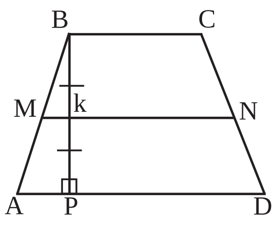
$$\left.\begin{array}{l}S_{ABEF}=x\cdot h\\ S_{ABEF}=\dfrac{12-x+28-x}{2}\cdot h\end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{40-2x}{2} \Rightarrow x=10.$$

10.



$S_{ABCD}=S_{\Delta AMD}-S_{\Delta BMX}=\dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}.$

11.



$MN=8.\qquad BK=KP=h.$

$$\left.\begin{array}{l}S_{AMND}=\dfrac{8+12}{2}\cdot h=10h\\ S_{MBCN}=\dfrac{4+8}{2}\cdot h=6h\end{array}\right\} \Rightarrow S_{MBCN}\cdot S_{AMND}=6h:10h=3:5.$$

12. როცა II მოვიდა ფინიშთან, ე.ი. t დროში გაირბინა 100 მ. III ჩამორჩებოდა მას 10მ-ით. ე.ი. გაირბინა 90, იმავე t დროში. $V_3=\frac{90}{t}$; $V_2=\frac{100}{t}$ ანალოგიურად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ $\frac{V_1}{V_2}=\frac{10\cdot 10}{9\cdot 10}$, ე.ი. $V_1:V_2:V_3=100:90:81 \Rightarrow \frac{V_1}{V_3}=\frac{100}{81} \Rightarrow V_1=100x$ და $V_3=81x$. t დროში, როცა I-მა გაირბინა 100 მ, ე.ი. $S_1=100$. ვთქვათ, III-მ გაირბინა S_3 მ, ე.ი. $t=\frac{S_1}{V_2}=\frac{S_3}{V_3} \Rightarrow \frac{100}{100x}=\frac{S_3}{81x} \Rightarrow S_3=81$მ. ე.ი. III ჩამორჩება I-ს 19 მ-ით.

13.

	ნაბ.-ის სიგრძე	ნაბ.-ის რაოდ. t დროში
მ	x	y
დ	0,8x	1,2y

t დროში მაღალმა გაიარა xy მანძილი, დაბალმა კი 0,8·1,2y=0,96xy. ე.ი. მაღალი დადის უფრო ჩქარა.

14. მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები

ამოხსნები, მითითებები:

2. $\left(\frac{3+0}{2};\frac{4+0}{2}\right)$;

3. B(x;y) $\frac{2+x}{2}=1$ და $\frac{3+y}{2}=1$

5. AB მონაკვეთის შუაწერტილი აღვნიშნოთ c-თი. ცხადია, $c\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. საძიებელი წერტილი არის c-ის სიმეტრიული c_1 წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ. $c_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

6. c(0;y) AC=CB $\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-y)^2} \Rightarrow 25+(7-y)2=9+(y+1)^2 \Rightarrow 16(\cancel{y}+1+7-\cancel{y})(y+1-7+y) \Rightarrow$
$\Rightarrow 16=8(2y-6) \Rightarrow y=4$

7. D წერტილი არის AC მონაკვეთის შუაწერტილი, ანუ მისი კოორდინატებია D(1;1)
$BD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

9. $x\cdot 0{,}7=21$ $x=30$ x-ით აღვნიშნეთ საწყისი ფასი.

10. 7-დან უნდა აირჩიოს 5, ანუ უნდა დატოვოს 2. 7-დან 2-ის არჩევის $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ ვარიანტია.

13. ბიჭს უნდა ჰყავდეს 3 ძმა, ანუ ბიჭების რაოდენობაა 4. ანალოგიური მსჯელობით გოგოე-ბის რაოდენობაა 3. პასუხი – 7 ბავშვი.

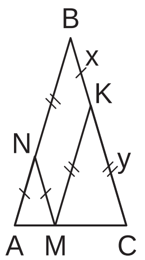
14. ა და ბ შეიძლება, გ და დ – არა.

ტესტი.
1. ბ; **2.** დ; **3.** დ; **4.** გ; **5.** დ.

VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები

3. პარალელოგრამის კუთხეები სიმაღლეებს შორის კუთხეების ტოლია. ე.ი.
ა. 45° ბ. 135°

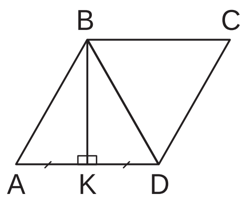
4.



P=2x+2y=2(x+y)=10

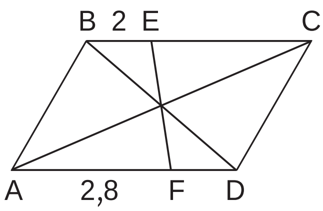
5. 7x=1,4
x=0,2
გვერდებია 0,6 მ და 0,8 მ

6. BD=0,9=AB
AB+BC=1,9 ე.ი. BC=1 მ



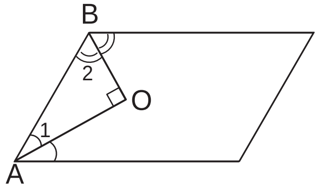
7. ABCD რომბია, ე.ი. AB=BD=6

8.

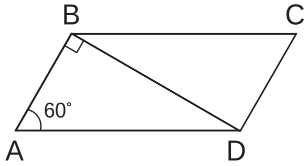


BC=AD=4,8

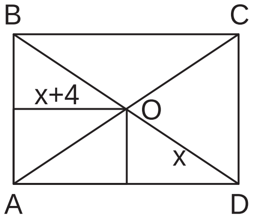
10. პარალელოგრამის ∠A+∠B=180°
ე.ი. ∠1+∠2=90°



11. მოცემულობის თანახმად $\angle ADB=\angle DBC=30^\circ$; $\angle ABD=90^\circ$
ე.ი. $AD=2AB$ $AB=20$ სმ; $AD=40$ სმ

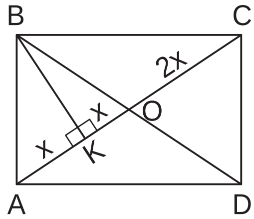


12.

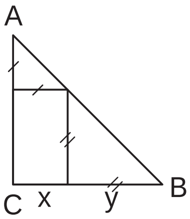


$4x+4(x+4)=56$
$2x+4=14$
$x=5$
$AB=10$ $BC=18$

13. $AB=4$ მ
ΔABO ტოლგვერდაა ე.ი. $AO=AB=4$
$AC=8$ მ

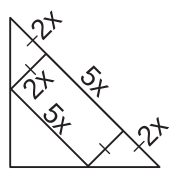


14.

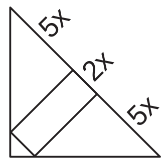


$x+y=6$
$P=2(x+y)=12$

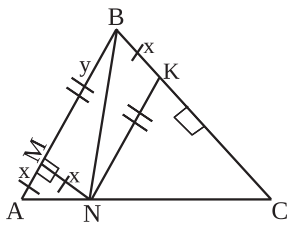
15. I შემთხვევა
$9x=45$
$x=5$
მართკუთხედის გვერდებია 10;25



II შემთხვევა
$12x=45$
$x=\frac{15}{4}$
მართკუთხედის გვერდებია 7,5 და 18,75

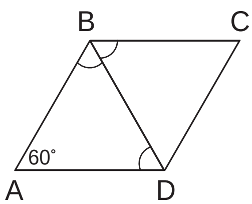


16.



ცხადია, MBKN პარალელოგრამია და AMN სამკუთხედი ტოლფერდა. $P=2x+2y=2(x+y)=30$.

18. $BD=AB=AD$
ე.ი. $\frac{P_{ABCD}}{BD}=4$



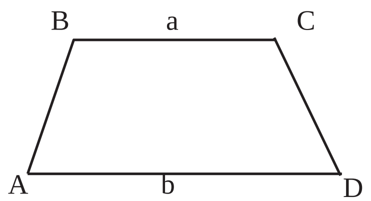
19. ABCD რომბია P=48

20. $S=12\cdot13+\frac{12\cdot5}{2}=186$

21. მიღებული ოთხკუთხედის გვერდები დიაგონალების პარალელურია და მათი ნახევრების ტოლია. ე.ი.
ა. რომბი;
ბ. მართკუთხედი;
გ. კვადრატი;
დ. პარალელოგრამი.

22. იხ 21.

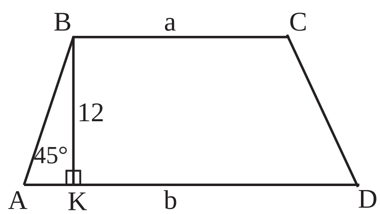
23.



BC=a; AD=b. $AB=CD=\frac{a+b}{2}$.

$P=a+b+2\cdot\frac{a+b}{2}=2(a+b)=21.$ $AB=CD=\frac{a+b}{2}=\frac{21}{4}$.

24.



BC=a; AD=b $\Rightarrow \frac{a+b}{2}=21$.

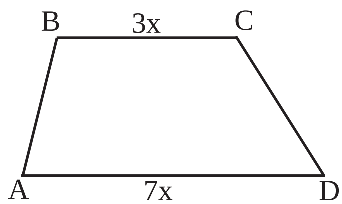
განვ. ΔABK. AK=BK=12.

$AK=\frac{b-a}{2}=12$.

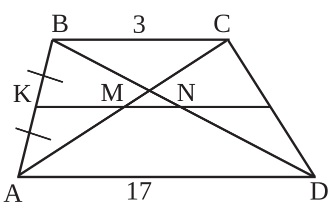
$$\begin{cases}a+b=42\\ b-a=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=33\\ a=9\end{cases}$$ AD=33.

25. $AD:BC=7:3 \Rightarrow AD=7x;\ BC=3x.\ AD-BC=3{,}2 \Rightarrow 7x-3x=3{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x=3{,}2 \Rightarrow x=0{,}8.$

$\frac{AD+BC}{2}=\frac{10x}{2}=5x=4.$



26.

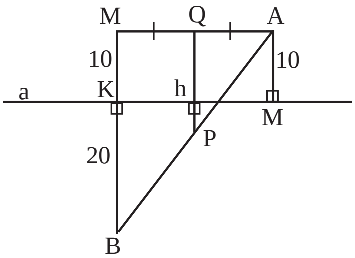


ΔABD-ში KN შუახაზია $\Rightarrow KN=\frac{17}{2}$.

ΔABC. KM შუახაზია $\Rightarrow KM=\frac{3}{2}$.

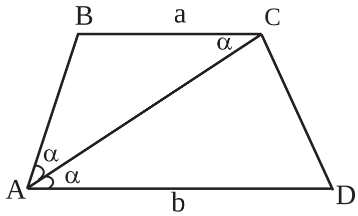
$MN=KN-KM=\frac{17}{2}-\frac{3}{2}=7.$

პასუხი: MN=7სმ.

27. 

A წერტილზე გავატაროთ a წრფის პარალელური წრფე. BK სხივთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M-ით.

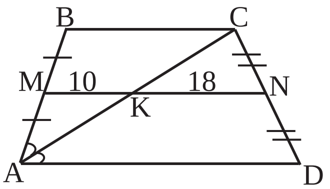
$$\left.\begin{array}{l} PQ=\dfrac{MB}{2}=15 \\ QL=10 \end{array}\right) \Rightarrow PL=5\text{სმ.}$$

28. 

BC:AD=2:5 ⇒ BC=2x და AD=5x. ∠BCA=α (BC||AD, AC მკვეთია) ⇒ AB=BC=CD=2x.

$P=5x+6x=11x=132 \Rightarrow x=12.\ \dfrac{BC+AD}{2}=\dfrac{2x+5x}{2}=\dfrac{7}{2}\cdot 12=42.$

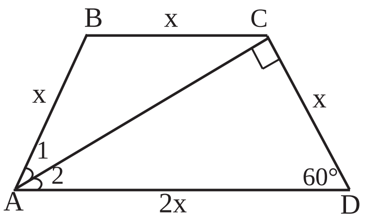
29. AB=BC=CD≡x (იხ. ამოცანა 13). 3x+1,5=4,5 ⇒ x=1.

30. 

$$\left.\begin{array}{l} AC,\ A\ \text{კუთხის ბისექტრისაა} \Rightarrow AB=BC \\ BD,\ D\ \text{კუთხის ბისექტრისაა} \Rightarrow DC=BC \end{array}\right) \Rightarrow AB=BC=DC.$$

MK=10 ⇒ BC=20; KN=18 ⇒ AD=36.
P=3·20+36=96.

პასუხი: P=96სმ.

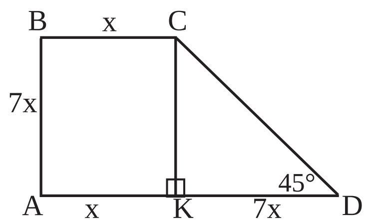
31. 

∠1=∠2 ⇒ AB=BC=CD=x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{განვ. } \Delta ACD \\ \angle C=90° \\ \angle D=60° \end{array}\right) \Rightarrow \angle CAD=30° \Rightarrow AD=2x.$$

∠BAD=∠BAC+∠CAD=60° ⇒ AB=CD=x.

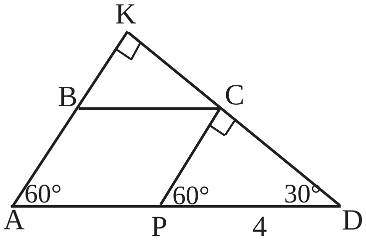
$P=5x=2 \Rightarrow x=\dfrac{2}{5}.\qquad AD=2x=\dfrac{4}{5}=0{,}8.$

32. 

∠C=135° ⇒ ∠D=45°. BC:AD=1:8 ⇒ BC=AK≡x; KD=7x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{განვ. } \Delta CKD \\ \angle k=90° \\ \angle D=45° \end{array}\right) \Rightarrow CK=KD=7x.$$

$\dfrac{BC+AD}{2}=\dfrac{9x}{2}=18 \Rightarrow x=4.\quad AB=7x=28\text{სმ.}$

33. 

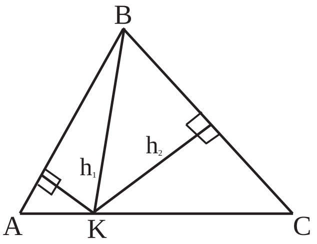
$\dfrac{BC+AD}{2}=8 \Rightarrow BC+AD=16 \Rightarrow BC=6$ და $AD=10$.

C წერტილიდან გავატაროთ AB ფერდის პარალელური CP მონაკვეთი. ცხადია, ∠CPD=60°; ∠PCD=90°. PD+AD–BC=4.

ΔPCD ⇒ PC=2. ცხადია, PC<CD $\left(\widehat{D}<\widehat{P}\right)$. PC=AB, ე.ი. AB მცირე ფერდია და AB=2სმ.

34. B_1 წერტილთა გეომეტრიული ადგილია B წერტილზე გამავალი AC წრფის პარალელური წრფე და ამ წრფის სიმეტრიული AC-ს მიმართ.

36.

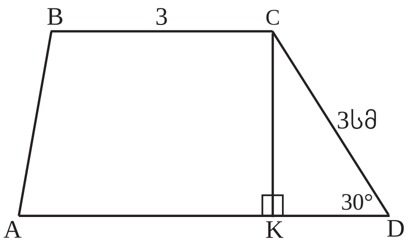


$AB=BC\equiv a$ $S_{\Delta ABK}=\frac{1}{2}ABh_1=\frac{1}{2}ah_1$ $S_{\Delta BKC}=ah_2$

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABK}+S_{\Delta BKC}=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)$ (1)

$S_{\Delta ABC}=a\cdot h_2$. აქედან (1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $h_1+h_2=h_a\cdot$(h_a — ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა და ე.ი. ΔABC-სთვის მადმივი სიდიდეა). რ.დ.გ.

37.



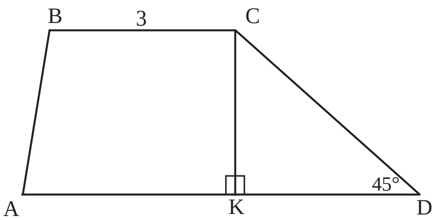
განვ. ΔCKD

$\angle K=90°$ $CK=\frac{3}{2}$

$S_{ABCD}=\frac{3+16}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{19}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{57}{4}=14{,}25.$

$S=14{,}25$სმ².

38.



$KD=\frac{AD-BC}{2}=\frac{54-42}{2}=\frac{12}{2}=6.$ $\Delta CKD\Rightarrow$ $CK=KD=6.$

$S_{ABCD}=\frac{54+42}{2}\cdot 6=96\cdot 3=288.$

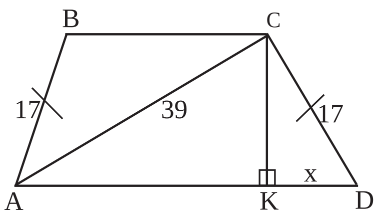
პასუხი: $S=288$სმ².

39. $CK\equiv h$

$h^2=17^2-x^2=39^2-(44-x)^2\Rightarrow(44-x)^2-x^2=39^2-17^2\Rightarrow$

$\Rightarrow(44-2x)\cdot\overset{2}{\cancel{44}}=\cancel{22}\cdot\overset{28}{\cancel{56}}\Rightarrow 44-2x=28\Rightarrow 2x=16\Rightarrow$

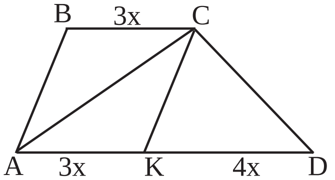
$\Rightarrow x=8.$



$\frac{AD-BC}{2}\Rightarrow\frac{44-BC}{2}=8\Rightarrow BC=28.$ $h^2=17^2-8^2=9\cdot 25\Rightarrow h=15.$

$\frac{AD+BC}{2}\cdot h=\frac{44+28}{2}\cdot 15=36\cdot 15=540.$ $S=540$მ².

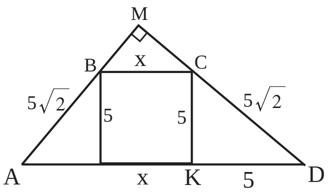
40.



$S_{\Delta ABC}:S_{\Delta ACD}=3:7\Rightarrow BC:AD=3:7\Rightarrow BC=3x$ და $AD=7x$.

$$\left.\begin{aligned}S_{ABCK}&=3x\cdot h\\ S_{\Delta CKD}&=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot h\end{aligned}\right)\Rightarrow\frac{S_{ABCK}}{S_{\Delta CKD}}=\frac{3}{2}.$$

41.



$\angle K=90° \Rightarrow \angle A=\angle D=45°$.

$\Delta CKD \Rightarrow CK=KD=5,\ CD=5\sqrt{2}$.

$BC\equiv x.\ S_{ABCD}=\dfrac{x+x+10}{2}\cdot 5=45 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$.

$AB=CD=5\sqrt{2}$ სმ; $BC=4$სმ; $AD=14$სმ.

42. $\dfrac{b}{a}=\dfrac{h_a}{h_b}=\dfrac{5}{7} \Rightarrow a=14$სმ; $b=10$სმ.

43. $16\cdot h_a=12\cdot h_b \Rightarrow \dfrac{h_a}{h_b}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \begin{matrix} h_a=3x \\ h_b=4x \end{matrix}$. $h_a+h_b=14 \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2$.

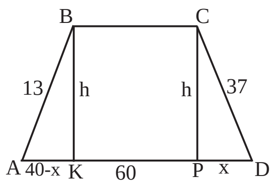
$h_a=6$მ; $h_b=8$მ.

44. $a=6;\ b=3.\ h_c=\dfrac{h_a+h_b}{2}$

$a\cdot h_a=b\cdot h_b \Rightarrow \dfrac{h_a}{h_b}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow h_b=2\cdot h_a$ $\Rightarrow h_c=\dfrac{3h_a}{2}$

$6\cdot h_a=c\cdot h_c \Rightarrow 6\cdot \cancel{h_a}=c\cdot\dfrac{3\cancel{h_a}}{2} \Rightarrow c=4$.

45.



$PD\equiv x;\ AK=40-x$

$h^2=37^2-x^2=13^2-(40-x)^2 \Rightarrow 37^2-13^2=x^2-(40-x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{5}{\cancel{50}}\cdot\overset{6}{\cancel{24}}=\overset{4}{\cancel{40}}(2x-40) \Rightarrow 2x-40=30 \Rightarrow x=35$.

$h^2=13^2-5^2=8\cdot 18 \Rightarrow h=12$.

$S_{ABCD}=\dfrac{60+20}{2}\cdot 12=480$.

46. $S=5\cdot 5=25$

47. $\begin{cases} \dfrac{X_B+4}{2}=3 \\ \dfrac{Y_B+2}{2}=3 \end{cases}$ B(2;4) $\begin{cases} \dfrac{X_C+1}{2}=3 \\ \dfrac{Y_C+1}{2}=3 \end{cases}$ C(5;5)

48. C(7;8) ე.ი. $K\left(\dfrac{3+7}{2};\dfrac{11+8}{2}\right)$ K(5;9,5)

VII თავი

<table>
<tr><td colspan="4">მიმართულება: გეომეტრია</td></tr>
<tr><td colspan="4">კლასი: 8</td></tr>
<tr><td colspan="4">საათების სავარაუდო რაოდენობა – 6-8</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემასთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები:
ცნება: ფორმა; კავშირი; მოდელირება
მკვიდრი წარმოდგენები:
• შესაძლებელია კუთხის გაზომვა;
• შესაძლებელია ორი კუთხის შედარება;
• კანონზომიერებების ალმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში;
• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;
• მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების ან გამოსახულების მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის.</td></tr>
<tr><td colspan="4">თემის ფარგლებში დასამუშავებელი საკითხები: კუთხე, კუთხის გაზომვა.</td></tr>
<tr><td>სამიზნე ცნებები და მათთან დაკავშირებული მკვიდრი წარმოდგენები</td><td>საკითხი და ქვეცნებები</td><td>საკვანძო შეკითხვა / შეკითხვები</td><td>კომპლექსური დავალებები</td></tr>
<tr><td rowspan="3">კავშირები – მართკუთხა სამკუთხედის ელემენტებს შორის შესაბამისობა;
• ორ ცვლადს შორის შესაძლებელია დამყარდეს შესაბამისობა.
• კანონზომიერებების ალმოჩენა და მათემატიკური ფორმულირება დაგვეხმარება პროცესის აღწერა, დასკვნების გაკეთება და სამყაროს შესწავლაში;</td><td>• მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები;
• კუთხის გრადუსული ზომა
• მოსაზღვრე კუთხეები;
• მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები.</td><td>1. შესაძლებელია თუ არა მახვილი კუთხის ზომის წარმოდგენა ამ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით?
2. ცალსახად განსაზღვრავს თუ არა მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია ამ კუთხის ზომას?
3. რას ნიშნავს ეკვივალენტური ფორმები?
4. რამდენი სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით შეიძლება წარმოვადგინოთ კუთხის ზომა?</td><td rowspan="3">კომპლექსური ამოცანის პირობა:
ნამუშევარში წარმოაჩინეთ:
• ჩვენს გარემომცველ სამყაროში არსებული მოვლენები, შეგვიძლია გავზომოთ და აღვწეროთ მათემატიკური ცნებებით და კანონებით.
• ეს ცნებები და კანონები შესაბამისად ახასიათებენ აღნიშნულ მოვლენას.</td></tr>
<tr><td colspan="2">კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები (აქტივობები, რესურსები)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ეტაპი I. მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა;
აქტივობა 1: მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს დახაზონ ილუსტრაციის შესაბამისი ნახაზი.
საკვანძო შეკითხვა:
ა) რა ფიგურით აღიწერება მზის სხივი?
ბ) თქვენს მიერ დახაზული ნახაზის მიხედვით დაასახელეთ სამკუთხედის ის გვერდი, რომელიც მუდმივია დღის ნებისმიერ მომენტში? (ბოძის სიგრძე)
გ) შესაძლებელია თუ არა მზის სხივის აღმწერი წრფის განტოლების დაწერა?</td></tr>
</table>

ფორმა – რაიმე ცნების ან კავშირის სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენა;

• ორ ცვლადს შორის ფუნციური დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ფორმით. (რაც ხელს უწყობს დამოკიდებულების უკეთ გააზრებასა და ანალიზს).

• კანონზომიერება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკვივალენტური ფორმებით;

ეტაპი II. მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით;

აქტივობა 1. მასწავლებელი ფასილიტაციას უწევს მოსწავლეებს, რომ გააანალიზონ სიტუაცია, ამისათვის ის მოსწავლეებს უსვამს კითხვებს:

• რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები აქვთ ნასწავლი?

• რომელი ფუნქცია აქვთ ნასწავლი?

• როგორ განიმარტება მახვილი კუთხის სინუსი?

• როგორ განიმარტება მახვილი კუთხის კოსინუსი?

• როგორ განიმარტება მახვილი კუთხის ტანგენსი?

ეტაპი III. კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით);

აქტივობა 2:

მასწავლებელი მოსწავლეებს აძლევს დავალებას. შეავსონ ცხრილი მათ მიერ შესრულებული გაზომვების საფუძველზე, იმის გათვალისწინებით, რომ ბოძის სიგრძე მუდმივია.

დრო	ჩრდილის სიგრძე	tgα
13 სთ		
14 სთ		
15 სთ		
16 სთ		
17 სთ		
18 სთ		
19 სთ		

კვლევა:

ა) ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგონ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები

ბ) დროის თითოეული მომენტისათვის დაწერეთ სხივის (წრფის) განტოლება, მიეცით $y=kx+b$ სახე. შეადარეთ tgα და k კოეფიციენტები, გამოთქვით ვარაუდი.

კომპლექსური დავალება

დააკვირდით ილუსტრაციას სადაც მოცემულია თუ როგორ ზომავენ მზის სხივის დახრის კუთხეს.

შეარჩიეთ მზიანი დღე და გაზომეთ ზემოთხსენებული კუთხე 13 საათიდან 18 საათამდე 1 საათში ერთხელ;

მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება; ნაშრომის პრეზენტაციისას გაითვალისწინეთ:

• წარმოადგინეთ კავშირები

• აღწერეთ მიღებული შედეგები.

• მოახდინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.

მოდელი / მოდელირება – შესაბამისი მოდელის შექმნა; • მათემატიკური მოდელი რეალურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენებს აღწერს მათემატიკური ცნებებისა და ენის გამოყენებით. პროცესები შეიძლება ჩაიწეროს განტოლების, გამოსახულების ან გრაფიკის მეშვეობით. მათემატიკური მოდელი გამოიყენება რეალური პროცესების ახსნისა და პროგნოზირებისთვის. • ფუნქციების ცვლილება შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შესაბამისი გრაფიკული გარდაქმნებით;	**ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით. საკვანძო შეკითხვა: როგორ უნდა წარმოვადგინო კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობის შედეგები ისე, რომ ეს მსმენელებისთვის საინტერესო და გასაგები იყოს? **აქტივობები:** მოსწავლეები ინდივიდუალურად წარმოადგენენ თავიანთ ნამუშევარს მასწავლებლისა და თანატოლების წინაშე. მასწავლებელი პრეზენტაციის დროს პრეზენტატორს უსვამს შეკითხვებს. **კომპლექსური დავალების დამუშავების ეტაპები** (აქტივობები, რესურსები) **ეტაპი I.** მოსწავლეებისთვის კომპლექსური დავალების პირობის გაცნობა; **ეტაპი II.** მოსწავლეთა წინარე ცოდნის გააქტიურება კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო საკითხების გახსენებით; **ეტაპი III.** კომპლექსური დავალების შესრულებისთვის საჭირო ახალი მასალის დამუშავება; კომპლექსურ დავალებაზე მუშაობა (მოსწავლეები მუშაობენ დავალებაზე მასწავლებლის ფასილიტაციით); **მოსწავლემ უნდა გააცნობიეროს, რომ:** **ეტაპი IV.** კომპლექსური დავალებების პრეზენტაცია / დისკუსია კომპლექსური დავალების პრეზენტაციისას გამოკვეთილ საკითხებთან დაკავშირებით.	მოსწავლეების მზაობისა და ინდივიდუალური საჭიროებების გათვალისწინებისთვის დავალება დიფერენცირებულია და მოიცავს უფრო „ხელმისაწვდომ“ და „გართულებულ“ ვარიანტებსაც. იდეები შესაძლებელია მოიძიოთ შემდეგ მისამართზე: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/teacherguide/573cfae7df3665860b69696f კომპლექსური დავალების შესრულების პროცესში მოსწავლეები დაფიქრდებიან მათემატიკის და ჩვენს გარშემო არსებული სამყაროს და მოვლენების კავშირებზე. როგორ შეიძლება მოვლენები აღწერილი და წარმოდგენილი იყოს გრაფიკების, განტოლებისა და ფორმულების მეშვეობით, რაც სწავლის პროცესს მეტად სახალისოს და საინტერესოს გახდის, ასევე მიხვდებიან მათემატიკის მნიშვნელობაზე;
	რესურსები: მოსწავლის წიგნი თავი 7	**შეფასების კრიტერიუმი:** განმავითარებელი შეფასება.

1. თალესის თეორემა

რეზიუმე:

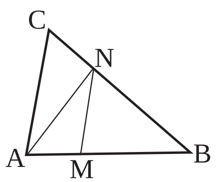
მოსწავლეები გაეცნობიან თალესის თეორემას და თეორემას პროპორციული მონაკვეთების შესახებ. ისწავლიან მონაკვეთის დაყოფას n ტოლ ნაწილად, მონაკვეთის გაყოფას მოცემული პროპორციით.

ამოხსნები, მითითებები:

1 და **2** ამოცანები, ზოგადად, განხილულია პარაგრაფში, ამდენად მოსწავლეებს უნდა შეეძლოთ მონაკვეთის დაყოფა ნებისმიერი კონკრეტული რაოდენობის ტოლ მონაკვეთად.

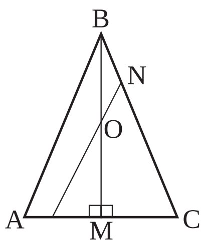
3. $\frac{AK}{KB} = \frac{PC}{BP}$, საიდანაც $\frac{PC}{9} = \frac{2}{3}$, ე.ი. PC=6.

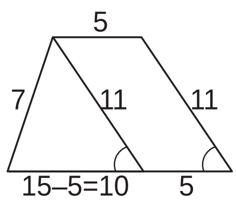
4. $\frac{DN}{CN} = \frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$.

5. 

$MN \| AC \Rightarrow CN:NB=AM:MB$.
CN=30.
BC=10+30=40

6. AKB კუთხის გვერდები გადაკვეთილია AB და MN პარალელური წრფეებით, ე.ი.
$AM:MK=BO:OK=2:3 \Rightarrow AM=2x$ და $MK=3x$, ე.ი. $AK=KC=5x$.
$AM:MC=2:8=1:4$.



7. 

8. $x=\frac{a-b}{2}=4$

9. ა) S=600+100t; ბ) S=600–100t.

10. ვთქვათ, უნდა შეკერონ x პალტო. დახარჯული თანხაა 60x+400 ლარი, გაყიდვების შედეგად კი აიღეს 120x ლარი. მოგება უნდა იყოს 20%. ე. ი. აღებული თანხა უნდა იყოს დახარჯულის 120%.

$$\frac{(60x+400)120}{100} = 120x$$

60x+400=100x
40x=400
x=10.

3. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება

რეზიუმე:

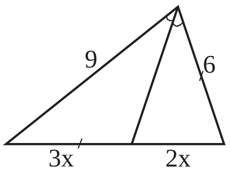
მოსწავლეები გაეცნობიან სამკუთხედის ბისექტრისას თვისებას. შეძლებენ ამ თვისების გამოყენებას გამოთვლითი ტიპის და აგების ამოცანებში.

ამოხსნები, მითითებები:

4. $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ AB=5x, მაშინ AC=3x, ე.ი. 8x+8=32.   x=3.

გვერდებია 8; 3x=9 და 5x=15.
უდიდესი გვერდია 15.

5.

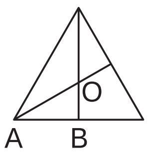


3x=6
x=2
მესამე გვერდის სიგრძეა 10.

2x=9 და 3x=9 შემთხვევები არ აკმაყოფილებს სამკუთხედის უტოლობას.

6. კათეტები იყოს 3x, 4x. დავწეროთ პითაგორას თეორემა. 5x=35.

8.



ა. AO:OB=12:5 ფუძე იყოს 2y   30:y=12:5   y=12,5. ფუძეა 25 სმ.
ბ. AO:OB=5:12 (არ აკმაყოფილებს სამკუთხედის უტოლობას).

10. ვთქვათ, დათოს აქვს x ლარი, ლევანს y ლარი, კახას კი z ლარი, მაშინ

$$\begin{cases} x+y=15{,}7 \\ y+z=12{,}8 \\ x+y+z=20 \end{cases}$$

I და II ტოლობების შეკრების შედეგად მივიღებთ: x+y+z+y=28,5, რომელშიც მესამის ჩასმით მივიღებთ, რომ y=8,5, ამ უკანასკნელის I და II-ში ჩასმით კი — x=7,2 და z=4,3.

პასუხი: დათოს აქვს 4 ლარი და 30 თეთრი, ლევანს – 8 ლარი და 50 თეთრი, კახას – 7 ლარი და 20 თეთრი.

12. ვიანგარიშოთ გაუმუქებელი სამკუთხედების ფართობები და გამოვაკლოთ კვადრატის ფართობს.

4. სამკუთხედის მედიანების თვისება

რეზიუმე:

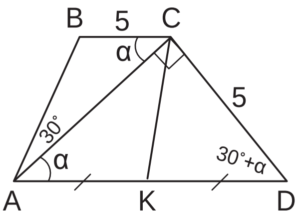
მოსწავლეები გაეცნობიან სამკუთხედის მედიანების თვისებას. ნახავენ, რომ სამივე მედიანის გავლების შედეგად მიღებული ექვსივე სამკუთხედი ტოლდიდია. გაეცნობიან ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზულ და მასზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების გამოსათვლელ ფორმულებს.

ამოხსნები, მითითებები:

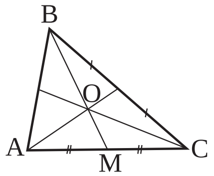
1. მედიანები გადაკვეთის წერტილით იყოფა 2:1 შეფარდებით (წვეროს მხრიდან).

4. ტოლგვერდა სამკუთხედში ბისექტრისები, სიმაღლეები, მედიანები ემთხვევა, ამიტომ ბისექტრისების (რაც იგივეა, მედიანების) გადაკვეთის წერტილიც გვერდიდან დაშორებული იქნება მისი სიგრძის მესამედით.

6. $\alpha+30^\circ+\alpha=90^\circ \Rightarrow \alpha=30^\circ$ ე.ი.
ΔABC ტოლფერდაა, $AB=5+CD$.
ΔACD-ში გავლებულია ჰიპოტენუზის მედიანა
$CK=AD:2=5$



7.



$S_{AOM}=S_{OMC}=S$ (OM მედიანაა). ვაჩვენოთ, რომ

$S_{\Delta ABO}:S_{AOM}=2:1$ (BO:OM=2:1 და სიმაღლე საერთო აქვთ).

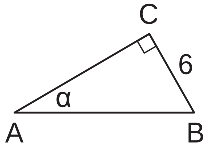
5. მედიანების თვისების გამოყენება აგების ამოცანებში

ა) ავაგოთ CAA_1 სამკუთხედი სამი გვერდით. CA_1 სხივზე გადავდოთ $A_1B=A_1C$. A და B წერტილები შევაერთოთ.
ბ) ავაგოთ ADC სამკუთხედი სამი გვერდით. ავაგოთ DC მონაკვეთის C_1 შუაწერტილი. AC_1 სხივზე გადავდოთ $C_1B=AC_1$ მონაკვეთი. და C წერტილები შევაერთოთ.
გ) ავაგოთ ODC სამკუთხედი სამი გვერდით. ამ სამკუთხედში. გავავლოთ CA_1 მედიანა. CA_1 სხივზე გადავდოთ. $A_1B=CA_1$, ხოლო A_1O სხივზე კი $OA=OA_1$.
დ) ავაგოთ OBA_1 სამკუთხედი სამი გვერდით. O სხივზე გადავდოთ $OD=\frac{1}{2}OB$, ხოლო A_1O სხივზე $OA=20A_1$ მონაკვეთები. გავავლოთ BA_1 და AD სხივები ერთმანეთთან გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ C-თი. A, B და C წერტილები შევაერთოთ.
ე) ავაგოთ BOC სამკუთხედი სამი გვერდით. CO სხივზე გადავდოთ $OC_1=\frac{1}{2}OC$, ხოლო BO სხივზე $OB_1=\frac{1}{2}OB$ მონაკვეთები. გავავლოთ CB_1 და გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A-თი. A, B და C წერტილები შევაერთოთ.

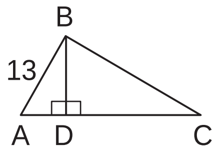
6. მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი

ამოხსნები, მითითებები:

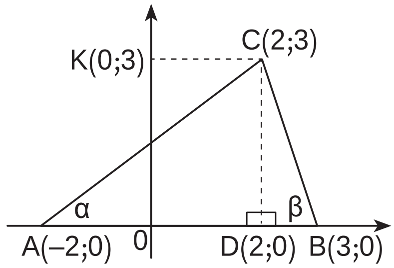
1.



$tg\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CB}{AC}=\frac{3}{4} \Rightarrow AC=\frac{6\cdot 4}{3}=8$

3. 

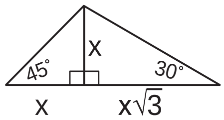
$\frac{BD}{13}=\frac{11}{26} \Rightarrow BD=5,5$



7. BD=3; AD=4; CD=3

$tg\alpha=\frac{3}{4}$; $tg\alpha=\frac{3}{3}=1$

9. ABCD მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები ალვნიშნოთ a და b-თი. d=2a, მაშინ ABC-ში კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია.

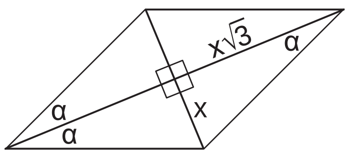
10.
კუთხა 

1 მ-ის ტოლ გვერდზე დაუშვით სიმაღლე და განიხილეთ მართ-სამკუთხედი.

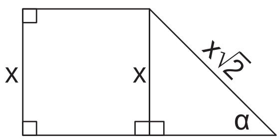
$x+x\sqrt{3}=1 \quad x=\frac{1}{3+1}=\frac{3-1}{2}$

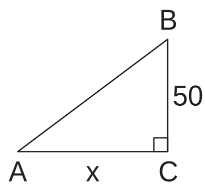
12. $tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=30^\circ$

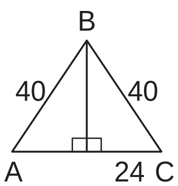
კუთხეებია 60° და 120°



13. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha=45^\circ$

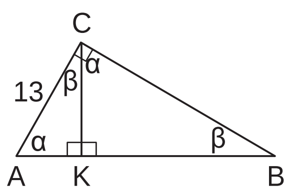




14. 

$\sin c=\frac{\sqrt{40^2-24^2}}{40}=\frac{4}{5}$

16. $\Delta AKC \Rightarrow CK=12 \quad tg\beta=\frac{5}{12}$

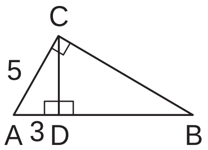


21. 3 მუშას – 5 დღ → სამუშაო

1 მუშას – 1 დ.დ. → $\frac{1}{15}$ ნაწილი

7. მართკუთხა სამკუთხედი

ამოხსნები, მითითებები:

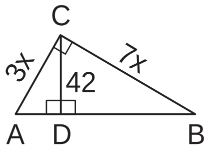
1. 

$5^2=3\cdot C \Rightarrow C=\frac{25}{3}$

$BC^2=C\cdot(C-3)=\frac{25}{3}\left(\frac{25}{3}-31\right)=\frac{25}{3}\cdot\frac{16}{3}$

$BC=\frac{20}{3}$

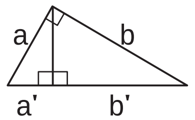
2. $a^1=9$; $b^1=16$ $a^2=9\cdot 25$; $b^2=16\cdot 25$

3. 

$hc=ab \Rightarrow c=\frac{21x^2}{42}=\frac{x^2}{2}$

$a^2=a^1c \Rightarrow 9x^2=a^1\frac{x^2}{2} \Rightarrow a^1=18$

ანალოგიურად მივიღებთ $b^1=98$

4. 

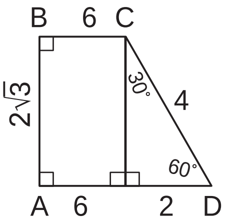
$\left.\begin{matrix} a^2=a^1c \\ b^2=b^1c \end{matrix}\right) \Rightarrow \frac{a^1}{b^1}=\frac{a^2}{b^2}$ რ.დ.გ.

7. a=2 სმ; b=3 სმ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^1}{b^1} \Rightarrow \frac{a^1}{b^1}=\frac{4}{9}$ $a^1=4x$, $b^1=9x$, $c=13x$

ა. c=9+4=13

$\sqrt{13}x=13$ $x=\frac{1}{\sqrt{13}}$ $a^1=\frac{4}{\sqrt{13}}$ $b^1=\frac{9}{\sqrt{13}}$

ბ. $h^2=a^1b^1=36x^2 \Rightarrow h=6x=6\sqrt{13}$

11. 

$\angle BCD=120^\circ \Rightarrow \angle ADC=60^\circ$

$\Delta CKD \Rightarrow CD=4$

$AB=CK=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

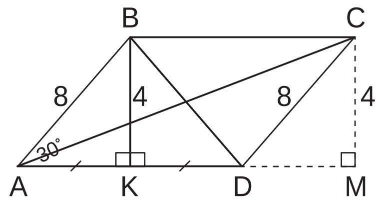
$\Delta ABD \Rightarrow BD=\sqrt{12+64}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

$\Delta ABC \Rightarrow AB=\sqrt{36+12}=4\sqrt{3}$

12. BD=8

$AK=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3} \Rightarrow AD=8\sqrt{3}$

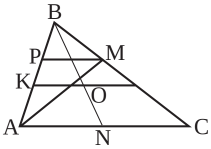
$DM=4\sqrt{3}$ $\Delta ACM \Rightarrow AC^2=4^2+(12\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC=8\sqrt{7}$



ტესტი:

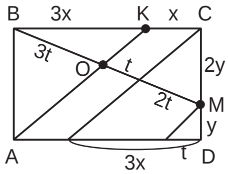
1. დ; **2.** გ; **3.** ბ; **4.** გ; **5.** ა; **6.** ა; **7.** ა; **8.** ა.

VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები

9. 

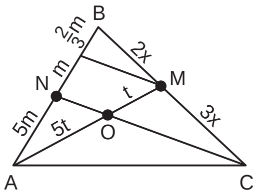
$\frac{BK}{AK}=\frac{2}{1}$. AK=x, KB=2x, ე.ი. AB=3x.

$\frac{BP}{AP}=\frac{BM}{MC}=1$, ე.ი. AP=PB=$\frac{2}{3}$x. BP:PK:AK=$\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$:1=3:1:2.

12. 

1:1

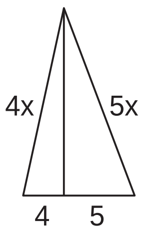
13. $5:\left(1+\frac{2}{3}\right)=5:\frac{5}{3}=3:1$

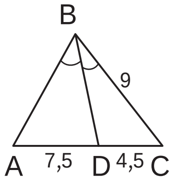


14. $9x^2=81$

$x=3$

$S=\frac{12\cdot 9}{2}=54$



15. 

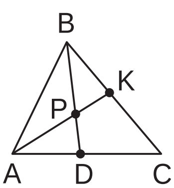
$\frac{9}{AB}=\frac{45}{75}$

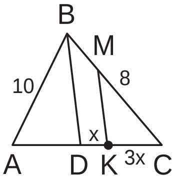
$\frac{1}{AB}=\frac{1}{15}$

AB=15

16. AK=6

PK=2



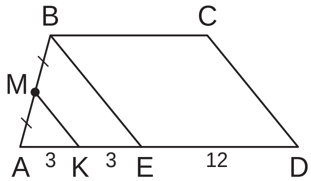
17. 

MC=6

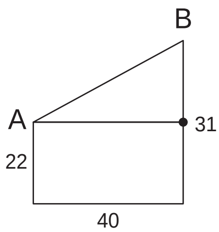
18. BC=12

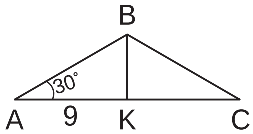
AD=18

AK=3



19. AB=$\sqrt{81+1600}$=41 მ



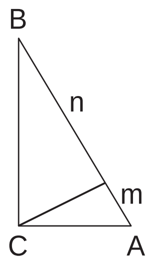
20. 

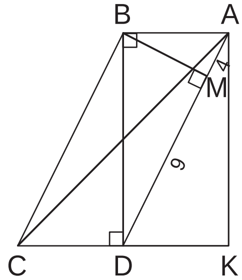
$\frac{9}{AB}=\cos 30^\circ$

$AB=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$

21. CA=$\sqrt{m(m+n)}$

CB=$\sqrt{n(m+n)}$



22. 

AB=$\sqrt{4\cdot 13}=2\sqrt{13}$

AD=13

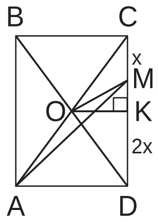
BD=$3\sqrt{13}$

23. $AB=12$

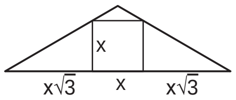
$\Delta AOD \rightarrow AO=6\sqrt{2}$

$\Delta AMD \rightarrow AM=4\sqrt{13}$

$\Delta OKM \rightarrow OM=2\sqrt{10}$



24.



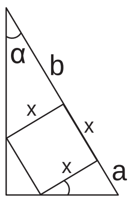
$(2\sqrt{3}+1)x=a$

$x=\frac{a}{2\sqrt{3}+1}=\frac{a(2\sqrt{3}-1)}{11}$

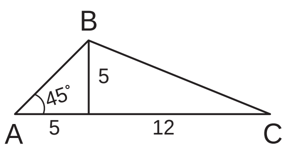
25. $tg\alpha=\frac{x}{b}$

$tg\alpha=\frac{a}{x}$

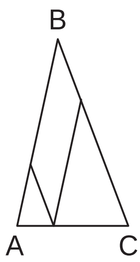
$x=\sqrt{ab}$



26. $BC=13$



27.

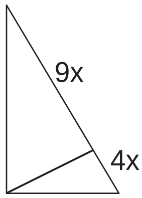


P=20 სმ

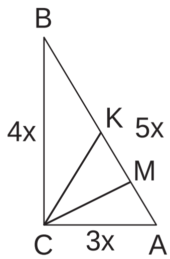
28. $5x=2$

$x=\frac{2}{5}$

$13x=\frac{26}{5}$



29.



$\frac{AM}{BM}=\frac{9}{16}$

საკონტროლო წერა

საკონტროლო წერა N1

1. დაწერე მოცემული გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამ და დაადგინე, ჭეშმარიტია თუ არა ის.
ა) ნებისმიერ ორ განსხვავებულ წრფეს შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს 1 საერთო წერტილი.
ბ) ყველა ნატურალური რიცხვი მთელია.

2. ფეხბურთის გუნდმა ჩაატარა 20 თამაში (მატჩი). აქედან 2-ჯერ მეტი მოიგო, ვიდრე წააგო, ხოლო ფრეების რაოდენობის სიხშირე იყო – $\frac{2}{5}$.
ა) რის ტოლია გუნდის საშუალო ქულა, თუ მოგებაზე იწერება – 2, ფრეზე – 1, ხოლო წაგებაზე – 0 ქულა?
ბ) რის ტოლია გუნდის მიერ მოგროვილი ქულების მოდა?

3. გამოთქვი ვარაუდი, რას უდრის კამათლის გაგორების დროს მარტივი რიცხვის მოსვლის ალბათობა.

ამოხსნა:

1. ა) ორ განსხვავებულ წრეწირს შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი საერთო წერტილი. – მცდარია. არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ არის მთელი – მცდარია.

2.
ფრე – $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ ე.ი. იყო 8 ფრე.
მოგება – x; წაგება 12–x. 2x=12–x; x=4.
მოგება – 8; წაგება – 4.
ა) საშუალო ქულა $\frac{8\cdot2+8\cdot1+0\cdot4}{20}=1,2$.
ბ) 0; 2.

3. მარტივი – 2; 3; 5; ალბათობა $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

საკონტროლო N2

1. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში (AB=BC), რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხე 40˚-ია, აღებულია O წერტილი ისე, რომ AO=OC=AC. იპოვე ∠AOB და ∠BAO.

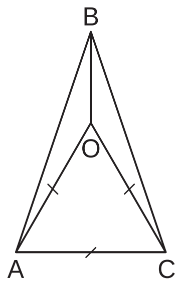
2. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე 40˚-ია. იპოვე კუთხე მართი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის.

3. დაამტკიცე, რომ მართკუთხა სამკუთხედში არ შეიძლება, რომ მახვილი კუთხის ბისექტრისა და მედიანა ერთმანეთს ემთხვეოდეს.

4. წრფიდან 45 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი რომელთა შეფარდებაა 2:3. უდიდესი დახრილი წრფესთან ადგენს 30˚-იან კუთხეს. იპოვე დახრილთა სიგრძეები.

5. დაწერე A_1 და B_1 წერტილების კოორდინატები, თუ A_1B_1 მონაკვეთი AB მონაკვეთის სიმე-ტრიულია O ცენტრის მიმართ და A(2;3); B(1;7).

ამოხსნა:



1. $\angle OAC=60^\circ$

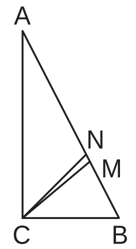
$\angle BAC=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$; ე.ი

$\angle BAO=70^\circ-60^\circ=10^\circ$ და $\angle AOB=\frac{360^\circ-60^\circ}{2}=150^\circ$;

2. $\angle NCB=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$

$\angle MCB=\angle A=40^\circ$

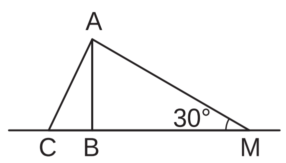
$\angle NCM=45^\circ-40^\circ=5^\circ$;



3. მახვილი კუთხის ბისექტრისა და მედიანა ერთმანეთს რომ ემთხვეოდეს, მაშინ ჰიპოტენუ-ზა კათეტის ტოლი გამოვა, რაც შეუძლებელია.

4. $\left.\begin{matrix} AB=45 \\ \angle M=30^\circ \end{matrix}\right) \Rightarrow AM=90$

$AC=\frac{2}{3}\cdot 90=60$ (სმ)



5. $A_1(-2;-3)$ $B_1(-4;-8)$.

საკონტროლო N3

1. გამოთვალე:

ა) $\frac{5(5^3)^5}{5^{12}}$;　　ბ) $\frac{6^3\cdot 27^3}{4^2\cdot 9^6}$;　　გ) $\frac{15^5(-3)^6}{45^4\cdot 3^2}$.

2. გაამარტივე და გამოთვალე: $\frac{(25x^{-3}y^{-6})^{-2}}{(15x^{-2}y^{-3})^{-4}}$, თუ ხ=3 და ყ=35.

3. იპოვე გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ x=5

ა) $\frac{x^2-4}{x^3+8}$;　　ბ) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;

4. იპოვე გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a=-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{2}{5}$.

$$\frac{10}{4a^2-25b^2}-\frac{1}{5b^2-2ab}-\frac{5}{4a^2+10ab}$$

5. სავსე აუზიდან პირველ საათში გავიდა მთელი წყლის $\frac{2}{5}$, შემდეგ საათში დარჩენილი წყლის 60%. წყლის რა ნაწილი დარჩა აუზში?

ამოხსნა:

1.

ა) $\frac{5(5^3)^5}{5^{12}}=\frac{5^{16}}{5^{12}}=5^4=625$

ბ) $\frac{6^3\cdot 27^3}{4^2\cdot 9^6}=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 3^9}{2^4\cdot 3^{12}}=\frac{1}{2}$

გ) $\frac{15^5(-3)^6}{45^4\cdot 3^2}=\frac{3^5\cdot 5^5\cdot 3^6}{3^8\cdot 5^4\cdot 3^2}=3\cdot 5=15.$

2. $\frac{(25x^{-3}y^{-6})^{-2}}{(15x^{-2}y^{-3})^{-4}}=\frac{15^4x^6y^{12}}{25^2x^8y^{12}}=\frac{3^4}{x^2}=\frac{3^4}{3^2}=9$

3. ა) $\frac{x^2-4}{x^3+8}=\frac{x-2}{x^2+2x+4}=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}$

ბ) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{x-3}{x+3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

4. $\frac{10}{4a^2-25b^2}-\frac{1}{5b^2-2ab}-\frac{5}{4a^2+10ab}=\frac{10}{(2a-5b)(2a+5b)}+\frac{1}{b(2a-5b)}-\frac{5}{2a(2a+5b)}=$

$=\frac{20ab+4a^2+10ab-10ab+25b^2}{2ab(2a-5b)(2a+5b)}=\frac{(2a+5b)^{\cancel{2}}}{2ab(2a-5b)\cancel{(2a+5b)}}=-\frac{15}{2}$;

5.

	გავიდა	დარჩა
I სთ	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
II სთ	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$;

საკონტროლო N4

1. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\frac{5x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=0$; ბ) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$

2. ამოხსენი უტოლობა

ა) $2{,}4x+1{,}7\geq4{,}9+4x$; ბ) $4(x+1)-4>3+2(2x-5)$; გ) $8(x+2)-3\leq4(2x-3)+3$

3. ამოხსენი განტოლება:

ა) $(x-5)^2+(y+3)^2=0$; ბ) $|x-2|+|y+3|=0$.

4. დაამტკიცეთ, რომ თუ a>0 და b>0. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

ამოხსნა

1.

ა) $\frac{5x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=0$; $x\neq\pm2$

$5x-x+2=0$

$4x=-2$ $x=-\frac{1}{2}$

ბ) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$; $x\neq7$

$8-x=8x-56+1$

$9x=63$

$x=7$ ე.ი. ამონახსნი არ აქვს.

2.

ა) $2{,}4x+1{,}7\geq4{,}9+4x$

$-1{,}6x\geq3{,}2$

$x\leq-2$

ბ) $4(x+1)-4>3+2(2x-5)$

$4x+4-4>3+4x-10$

$0>-7$ ნებისმიერი

გ) $8(x+2)-3\leq8x-12+3$

$8x+16-3\leq8x-9$

$13\leq-9$ $x\notin\varnothing$

3.

ა) $(x-5)^2+(y+3)^2=0$

$x=5$ $y=-3$

ბ) $|x-2|+|y+3|=0$

$x=2$; $y=-3$;

4. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4. \quad a>0 \quad b>0$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ გადამრავლებით $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

საკონტროლო N5

1. შეასრულე მოქმედება: $\frac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{2}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

2. იპოვე მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი 192 სმ^2-ის ტოლია, ხოლო გვერდების შეფარდებაა – 4:3.

3. ავტომობილი ქალაქიდან B ქალაქში ჩავიდა 60 კმ/სთ. სიჩქარით, უკან დაბრუნდა 50 კმ/სთ სიჩქარით. იპოვე ავტომობილის საშუალო სიჩქარე მთელ გზაზე.

4. გაამარტივე და გამოთვალე:

$\frac{a+2\sqrt{a}}{a-4}\cdot\left(\frac{(\sqrt{a}+2)^2}{8\sqrt{a}}-1\right)$, თუ $a=36$

5. დაამტკიცე, რომ გამოსახულება მთელი რიცხვია: $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

ამოხსნა:

1. $\frac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{2}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{5}+\cancel{2\sqrt{7}}+4\sqrt{5}-\cancel{2\sqrt{7}}}{20-7}=\frac{8\sqrt{5}}{13}$

2. $4x\cdot 3x=192 \quad x=2 \quad P=2\cdot 7x=28$ (სმ)

3. $V_{\text{საშ}}=\frac{2S}{\frac{S}{60}+\frac{2S}{50}}=\frac{2S}{\frac{11S}{300}}=\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$ (კმ/სთ).

4. $\frac{a+2\sqrt{a}}{a-4}\cdot\left(\frac{(\sqrt{a}+2)^2}{8\sqrt{a}}-1\right)=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}\cdot\frac{a+4\sqrt{a}+4-8\sqrt{a}}{8\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}\cdot\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{8\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}-2}{8}=\frac{6-2}{8}=\frac{1}{2}$;

5. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}+\sqrt{9-6\sqrt{5}+5}=\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$

ან ასე: $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}\equiv a$
$a^2=14+6\sqrt{5}+14-6\sqrt{5}+2\sqrt{196-180}=28+8=36$
ე.ი $a=6$.

საკონტროლო N6

1. დაწერე წრფივი ფუნქცია, რომლის გრაფიკი პარალელურია $y=3x+4$ წრფის და გადის (2;5) წერტილზე.

2. იპოვე შემდეგ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები: $y=2x-4$ და $y=5x+5$.

3. ორი რიცხვის ჯამი 160-ის ტოლია, თუ პირველს შევამცირებთ 20%-ით, ხოლო მეორეს 25%-ით, მათი ჯამი 125-ის ტოლი გახდება. იპოვე ეს რიცხვები.

4. ამოხსენი სისტემა: $\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)\end{cases}$

5. იპოვე განტოლების ნატურალური ამონახსნები: $x^2-y^2=13$.

ამოხსნა:

1. $y=3x+4$ $A(2;5)$

$y=3x+b$ $y=3x-1$

$5=6+b$ $b=-1$

2. $\begin{cases}y=2x-4\\y=5x+5\end{cases}$ $2x-4=5x+5$ $x=-3$ $y=-10$ $(-3;-10)$

3. $\begin{cases}x+y=160\\\frac{4x}{5}+\frac{3y}{4}=125\end{cases}$ $x+y16$ $\begin{cases}16x+15y=2500\\15x+15y=2400\end{cases}$ $x=100$ $y=60$

4. $\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)\end{cases}$ $\begin{cases}xy+5x+3y+15=xy+8x+y+8\\10xy+14x-15y-21=10xy+10x-12y-12\end{cases}$

$\begin{cases}3x-2y=7\\4x-3y=9\end{cases}$ $(3;1)$;

5. $x^2-y^2=13$ $13=1\cdot13=13\cdot1=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$

$(x-y)(x+y)=13$ რადგან ორივე ნატურალურია, გვაქვს ერთი ვარიანტი:

$\begin{cases}x+y=13\\x-y=1\end{cases}$, საიდანაც $x=7$ $y=6$

საკონტროლო N7

1. n-კუთხედის ყველა კუთხე ტოლია160˚-ის. იპოვე n.

2. EF მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუახაზია (EF||AC). იპოვე $S_{\Delta EFB}$, თუ $S_{\Delta ABC}=36$ სმ².

3. ტრაპეციის დიაგონალი ტრაპეციის შუახაზს ყოფს ორ მონაკვეთად რომელთა შეფარდებაა 7:4. იპოვე ტრაპეციის F ფუძეები, თუ შუახაზი 55 სმ-ია.

4. რომბის კუთხე 30˚-ია, პერიმეტრი 120 სმ-ის ტოლია. იპოვე ფართობი.

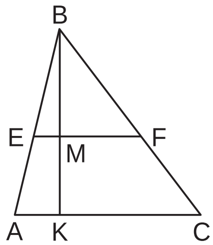
5. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი მახვილი კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს. მცირე ფუძე ისე შეეფარდება დიდ ფუძეს, როგორც 2:5. იპოვე ტრაპეციის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 44 სმ-ის ტოლია.

ამოხსნები:

1. $180(n-2)=160n$

$n=18;$

2.



$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK=36 \Rightarrow AC\cdot BK=72$

$S_{EFB}=\frac{1}{2}EF\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BK=\frac{1}{8}AC\cdot BK=9$

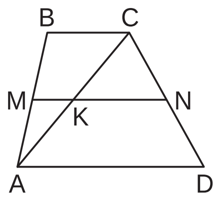
3. $11x=55$

$x=5$

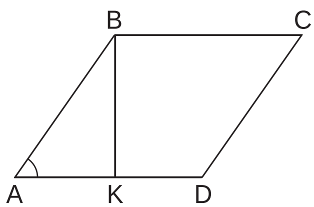
$MK=10;$

$KN=35;$ ე.ი $BC=2MK=20$

$AD=2KN=70.$



4.



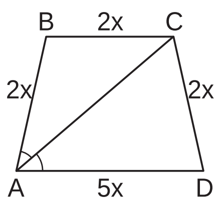
$P_{ABCD}=120$ ე.ი. $AB=30$

ΔABK-ში $BK=\frac{1}{2}AB=15$

$S_{ABCD}=BK\cdot AD=15\cdot 30=450$

5. $11x=44$ $AB=BC=CD=8$

$x=4$ $AD=10$



საკონტროლო N8

1. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 5 სმ და 12-ის ტოლია. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებადაც მართი კუთხის ბისექტრისა ყოფს ჰიპოტენუზას.

2. ABC კუთხის ერთ გვერდზე აღებულია M და N წერტილები, ხოლო მეორე გვერდზე K და P წერტილები ისე, რომ BM=5; BK=3; MN=2,5 და KP=1,5 დაამტკიცეთ, რომ MN||NP.

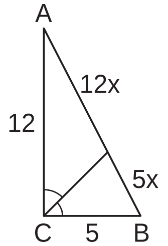
3. ABC სამკუთხედის მედიანების სიგრძეებია AM=7 სმ; BN=9 სმ და CK=14 სმ. ამ მედიანების კვეთის წერტილია O. იპოვეთ OM+ON+OK.

4. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზა მასზე დაშვებული სიმაღლით იყოფა 3 სმ და 7 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ ამ სიმაღლის სიგრძე.

5. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 სმ და 20 სმ. იპოვე მცირე მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

ამოხსნები:

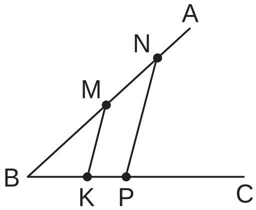
1.



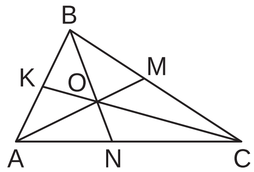
$AB=\sqrt{25+144}=13$

$AK=\frac{5}{17}\cdot 13=\frac{65}{17}$ $\quad BK=\frac{12}{17}\cdot 13=\frac{156}{17}$

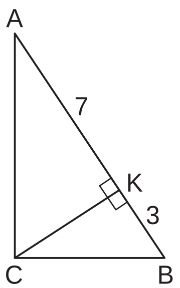
2. $\frac{BM}{BK}=\frac{MN}{KP}$;



3. $OM+ON+OK=\frac{1}{3}AM+\frac{1}{3}BN+\frac{1}{3}CK=\frac{1}{3}\cdot 30=10$



4.



$CK^2=3\cdot 7$ $\quad CK=\sqrt{21}$;

5. $AB=25$

$\sin\alpha=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$; $\quad \cos\alpha=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$; $\quad tg\alpha=\frac{3}{5}$.