ნანა ჯაფარიძე
ნანი წულაია
მაია წილოსანი

მათემატიკა

9

მოსწავლის წიგნი • ნაწილი II

გრიფმინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და
მეცნიერების სამინისტროს მიერ 2021 წელს.

სულაკაურის
გამომცემლობა

შინაარსი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეს, მიზანშეწონილად მივიჩნიეთ, გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისგან, თითოეული თავი კი – პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ერთი ან ორი „ტესტი თვითშემოწმებისთვის“. ტესტზე მუშაობა დაგეხმარება, შეამოწმო, რამდენად კარგად აითვისე განვლილი მასალა, რა გიჭირს, რა საკითხებზე უნდა გაამახვილო ყურადღება. წიგნში ზოგიერთი პარაგრაფის ბოლოს შეხვდები რუბრიკებს:

„პროექტი დამოუკიდებელი კვლევისთვის“ – მის შესასრულებლად დაგჭირდება ინფორმაციის მოძიება (ცნობარებში, სხვადასხვა სახის ლიტერატურაში, ინტერნეტში) და საპრეზენტაციო თემის წარმოდგენა.

„ეს საინტერესოა“ გაგაცნობს საინტერესო ფაქტებსა და თეორიებს მათემატიკის შესახებ.

წიგნში განმარტებები, თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა ფერად ფონზე ან ჩარჩოშია მოცემული.

ყოველ პარაგრაფში შეხვდები ამ ნიშნებს:

* – შედარებით რთული ამოცანა;

? – უმარტივესი კითხვები, რომლებსაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად უნდა უპასუხო.

– წყვილებში სამუშაო

– საკონტროლო კითხვები

– ტესტი თვითშემოწმებისთვის

– რუბრიკა „ეს საინტერესოა“

– კომპლექსური დავალება

– ჯგუფური მეცადინეობა

– სავარჯიშოები

– ტესტი

– მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი, მათემატიკური ნიშნების ცხრილი, ზომის ერთეულების ჩამონათვალი და სავარჯიშოების პასუხები.

გაუფრთხილდი წიგნს!
ნუ ჩაწერ წიგნში!

გისურვებთ წარმატებებს!

თავი 4

კვადრატული ფუნქცია

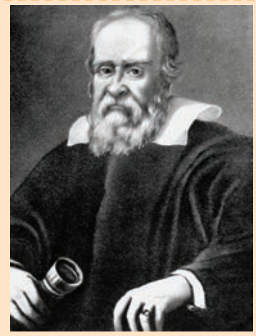
შეისწავლი:

- კვადრატულ ფუნქციასა და მის თვისებებს;
- სეგმენტზე განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის პოვნას;
- კვადრატული უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამოხსნას;
- მეორე ხარისხის განტოლებათა სისტემის ამოხსნას;
- ტექსტიანი ამოცანების ამოხსნას კვადრატული უტოლობის, ასევე მეორე ხარისხის განტოლებათა სისტემის საშუალებით

შეძლებ:

- $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით $y=f(x+a)$, $y=f(x)+b$, $y=kf(x)$ ფუნქციათა გრაფიკების აგებას;
- კვადრატული ფუნქციის თვისებების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა.

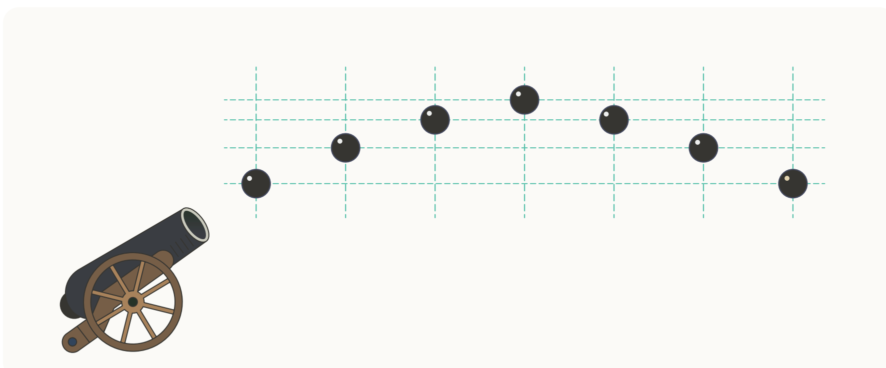
1. თუ დაკვირვებიხარ, რა ტრაექტორია აქვს კუთხით გასროლილ სხეულს?
2. გაიხსენე, როგორი ტრაექტორიით მოძრაობს კალათბურთელის მიერ კალათის მიმართულებით გასროლილი ბურთი? დაფიქრდი, ყოველთვის ერთი და იგივე ფორმა აქვს თუ არა ბურთის მოძრაობის ტრაექტორიას?

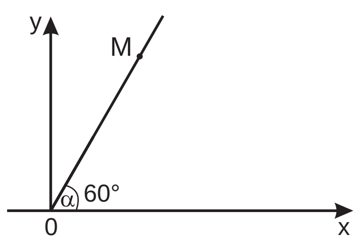


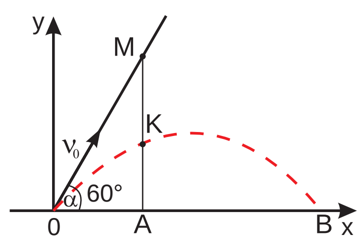
გალილეო გალილეი (1564-1642). იტალიელი ფიზიკოსი, ასტრონომი, ფილოსოფოსი. მან პირველმა დაადგინა, ჭურვის მოძრაობის ტრაექტორია.

ზარბაზნის ლულიდან საწყისი V_0=500 მ/წმ სიჩქარით და ჰორიზონტისადმი α=60°-იანი კუთხით გაისროლეს ჭურვი.

1. რა წირზე იმოძრავებს ჭურვი?
2. როგორი სახე ექნება ჭურვის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებას?
3. რის ტოლი იქნება ჭურვის ფრენის სიშორე?
4. რამდენ წამში დაეცემა ჭურვი მიწაზე?







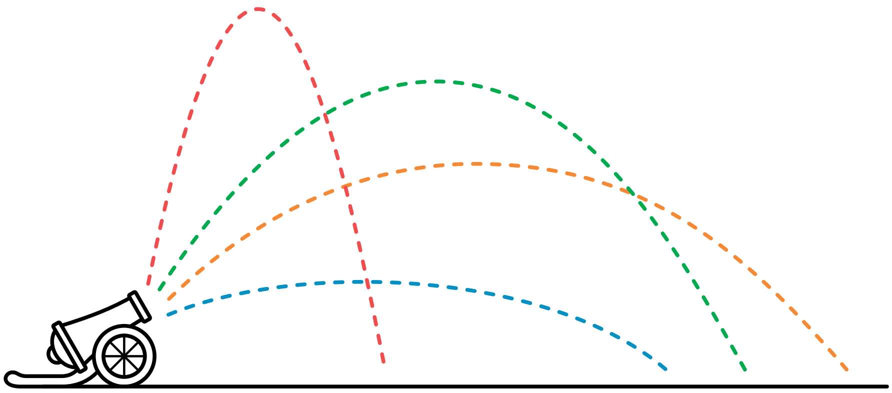
თუ წარმოვიდგენთ, რომ ჭურვზე არ მოქმედებს სიმძიმის ძალა, მაშინ ცხადია, ის იმოძრავებს წრფივად და t წამში გაივლის OM მანძილს.

სიმძიმის ძალის მოქმედების შედეგად ჭურვი t წამის შემდეგ იქნება არა M, არამედ K წერტილში.

1. რისი ტოლია ჭურვის ფრენის სიშორე 30 წმ-ის შემდეგ, 40 წამის შემდეგ?

2. რა სიმაღლეზეა ჭურვი გასროლიდან 40 წმ, 50 წმ-ის შემდეგ?

3. რა სიმაღლეზეა ჭურვი იმ მომენტში, როცა ფრენის სიშორეა 2 კმ; 3 კმ?

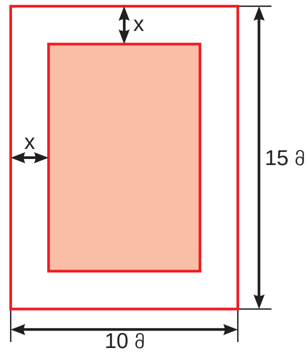


ჭურვის ფრენის ტრაექტორია, როცა გაისვრიან ერთსა და იმავე ობიექტს, ერთი და იმავე საწყისი სიჩქარით, მაშინ გასროლის კუთხე განსაზღვრავს ფრენის სიშორესაც და სიმაღლესაც.

1 კვადრატული ფუნქცია

ამოცანა 1

სკოლის ეზოში არის მართკუთხა ფორმის ნაკვეთი სიგანით 10 მ და სიგრძით 15 მ. IX^ა კლასის მოსწავლეებმა გადაწყვიტეს ამ ნაკვეთზე გაეშენებინათ ყვავილნარი, ყვავილნარის გარშემო კი ერთი და იმავე სიგანის ბილიკი გაესუფთავებინათ. დაწერეთ ფუნქცია
f: ბილიკის სიგანე → ყვავილნარის ფართობი.



ამოხსნა:

ვთქვათ, ბილიკის სიგანეა x მ, მაშინ ყვავილნარის სიგანე იქნება $(10-2x)$ მ, სიგრძე – $(15-2x)$ მ, ფართობი კი $S=(10-2x)(15-2x)$.

მივიღეთ ფუნქცია $S(x)=4x^2-50x+150$

$(S{:}x\to 4x^2-50x+150)$ (1).

1. იპოვეთ ყვავილნარის ფართობი, თუ ბილიკის სიგანეა 1,5 მ; 2 მ.

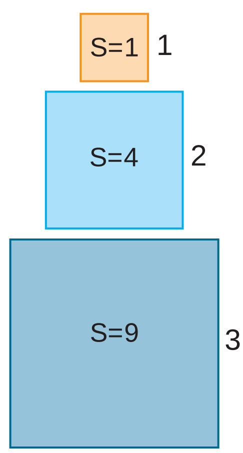
2. რა სიგანის ბილიკი უნდა გაასუფთაონ მოსწავლეებმა, თუ სურთ მიიღონ 104 მ^2 ფართობის ყვავილნარი?

3. იპოვეთ მიღებული ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ყვავილნარის ფართობის ბილიკის სიგანეზე (1) დამოკიდებულება კვადრატული ფუნქციაა.

> $y=ax^2+bx+c$ სახის ფუნქციას, სადაც $a, b, c\in R$, $a\neq 0$, ხოლო x ცვლადია, კვადრატული ფუნქცია ეწოდება.

როცა $a=1$, $b=c=0$, მივიღებთ $y=x^2$ ფუნქციას, რომელიც გამოსახავს კვადრატის ფართობის დამოკიდებულებას მისივე გვერდზე.
თუ $a=\pi$ და $b=c=0$. მივიღებთ $y=\pi x^2$ ფუნქციას.



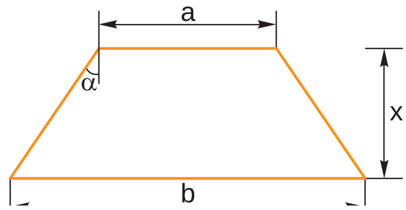
1. მოიყვანეთ თქვენთვის ცნობილი შესაბამისობა, რომელიც აღიწერება $y=\pi x^2$ ფუნქციით.

2. დაწერეთ ფუნქცია f: კენტი რიცხვი → მისი კვადრატი.

კვადრატული ფუნქციის საშუალებით აღიწერება სხვადასხვა მოვლენა და პროცესი ბუნებასა და ტექნიკაში. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 2

რკინიგზის მშენებლობისას მშენებლებს უხდებათ მიწით ღრმულების ამოვსება, შემაღლებულ ადგილებზე კი მიწის მოჭრა. მიწის სამუშაოების მოცულობა განისაზღვრება იმ მიწის რაოდენობით (მოცულობით), რომელიც მოჭრეს და მოაყარეს და რომელიც ტოლია ყრილის განივი კვეთის ფართობისა და ამ განივი კვეთის მქონე გზის მონაკვეთის სიგრძის ნამრავლისა. განივ კვეთას ტოლფერდა ტრაპეციის ფორმა აქვს (ნახ. 2), რომლის ფერდები ფუძისადმი დახრილია 30°-დან 60°-მდე კუთხით, რაც დამოკიდებულია გრუნტის სიმტკიცეზე.



ნახ. 2

ტრაპეციის (ყრილის) სიმაღლე აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო გზის სიგანე a მ-ით. კუთხე ფერდსა და სიმაღლეს შორის კი იყოს α. ვთქვათ, α=45°. მაშინ b=a+2x, ხოლო

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=(a+x)x \text{ . ე.ი. } S=x^2+ax.$$

ე.ი. განივი კვეთის ფართობის ყრილის სიმაღლეზე დამოკიდებულება კვადრატული ფუნქცია აღმოჩნდა.

თუ a=6,5 მ (რკინიგზის სიგანე), მაშინ $S=x^2+6{,}5x$.

საველე პირობებში ინჟინერს შეუძლია შეადგინოს ცხრილი და x-ის სასურველი მნიშვნელობისთვის ცხრილის მიხედვით იპოვოს ფართობის შესაბამისი მნიშვნელობა.

α კუთხისთვის:
$b=a+2x\text{tg}\alpha$
$S=(a+x\text{tg}\alpha)x$
$S=x^2\text{tg}\alpha+6{,}5x$

და ბოლოს, თქვენთვის კარგადაა ცნობილი, რომ თანაბარაჩქარებული (თანაბარშენელებული) მოძრაობისას სხეულის მიერ გავლილი მანძილი არის მოძრაობის დროზე დამოკიდებული კვადრატული ფუნქცია:

$$S=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

თუ ცნობილია, რომ სხეულმა იმ დრომდე, სანამ ათვლას დავიწყებდით, გაიარა S_0 მანძილი, მაშინ მივიღებთ:

$$S=\frac{a}{2}t^2+v_0t+S_0,$$

სადაც v_0 საწყისი სიჩქარეა, a კი აჩქარება.

სიჩქარე კი თანაბარცვლადი მოძრაობისას დროის წრფივი ფუნქციაა:

$$v_t=at+v_0.$$

მთვარეზე სხეული 6-ჯერ ნაკლები აჩქარებით ვარდება, ვიდრე დედამიწაზე.

ასევე, თავისუფლად ვარდნილი სხეულიც სიმძიმის ძალის მოქმედების შედეგად თანაბარჩქარებულად მოძრაობს $a=g \approx 9{,}8$ მ/წმ² აჩქარებით. მის მიერ გავლილი მანძილი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

მაგრამ როგორია კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, როგორია მისი თვისებები, როგორაა დამოკიდებული a, b და c პარამეტრებზე გრაფიკის მდებარეობა საკოორდინატო ღერძების მიმართ? ამ და სხვა შეკითხვებზე პასუხს ჩვენ მომდევნო პარაგრაფებში გავცემთ.

სავარჯიშოები

1. მართკუთხედის სიგრძე a სმ, ხოლო სიგანე b სმ-ია. მართკუთხედის გვერდების სიგრძე x სმ-ით გაადიდეს. დაწერე ფუნქცია $f:x \rightarrow S$, S მიღებული მართკუთხედის ფართობია.

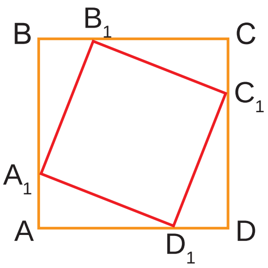
2. a სმ სიგრძის AB მონაკვეთზე ნებისმიერადაა აღებული C წერტილი, $AC \equiv x$. AB წრფის ერთ ნახევარსიბრტყეში აგებულია კვადრატები, რომელთა გვერდებია AB, AC, BC. დაწერე $y=S(x)$ ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს:

ა) სამივე კვადრატის ფართობების ჯამს;
ბ) იმ ფიგურის ფართობს, რომლის წერტილები მდებარეობენ დიდი კვადრატის შიგნით, მაგრამ არ ეკუთვნიან პატარა კვადრატებს.
იპოვე მიღებულ ფუნქციათა მნიშვნელობები, თუ $x=0$; $0{,}5a$; $0{,}25a$.

3. a სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის გვერდებზე გადაზომილია $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=x$ სმ-ის ტოლი მონაკვეთები. იპოვე ა) ფუნქცია, რომელიც გვიჩვენებს $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედის ფართობის x-ზე დამოკიდებულებას; ბ) ფუნქციის მნიშვნელობა, თუ $x=0$; $0{,}5a$; $0{,}25a$; a.

გამოწვევა

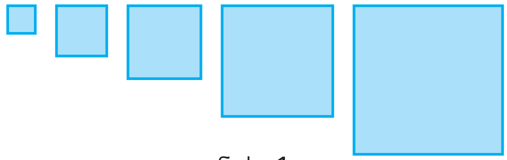
4*. წრფის ყველა წერტილი შეღებილია 2 ფერად – ლურჯად და წითლად. დაამტკიცე, რომ ამ წრფეზე მოიძებნება ისეთი სამი A, B და C წერტილი, რომ C არის AB მონაკვეთის შუა წერტილი. თან, A, B და C ერთი ფერისაა.



5. მოცემულია სამკუთხედი გვერდებით 8 სმ, 5 სმ და 7 სმ. იპოვე იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებსაც წარმოადგენს მოცემულის გვერდების შუაწერტილები.

6. გამოთვალე $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც კვადრატის გვერდის x სიგრძეს შეუსაბამებს ამავე კვადრატის ფართობს.



ნახ. 1

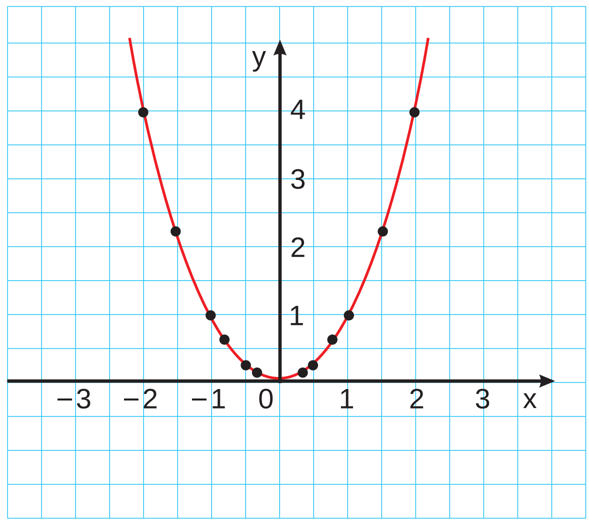
ავაგოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, რომლის განსაზღვის არეა R, რისთვისაც შევადგინოთ ცხრილი. მიღებული წერტილები მოვნიშნოთ მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში. გრაფიკის უფრო ზუსტად ასაგებად, შეგვიძლია ვიპოვოთ გრაფიკზე მდებარე კიდევ რამდენიმე წერტილი ((0,0) წერტილის სიახლოვეს).

x	x^2	(x; f(x))
−2	4	(−2; 4)
−1,5	2,25	(−1,5; 2,25)
−1	1	(−1; 1)
−0,5	0,25	(−0,5; 0,25)
0	0	(0; 0)
0,5	0,25	(0,5; 0,25)
1	1	(1; 1)
1,5	2,25	(1,5; 2,25)
2	4	(2; 4)

ცხრილი 1

x	x^2	(x; f(x))
0,3	0,09	(0,3; 0,09)
0,5	0,25	(0,5; 0,25)
0,8	0,64	(0,8; 0,64)
–0,3	0,09	(–0,3; 0,09)
–0,5	0,25	(–0,5; 0,25)
–0,8	0,64	(–0,8; 0,64)

ცხრილი 2



ნახ. 2

თუ მიღებულ წერტილებს შევაერთებთ გლუვი წირით, მივიღებთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკს.

დაამზადეთ პარაბოლის შაბლონი და გამოიყენეთ შემდგომში, დასახაზად.

ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ ფუნქციის:
ა) განსაზღვრის არე;
ბ) მნიშვნელობათა სიმრავლე;
გ) ფუნქციის ნული;
დ) დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი ფუნქცია;
ე) x-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის ზრდადი, კლებადი ფუნქცია;
ვ) ნიშანმუდმივობის შუალედები;
ზ) უმცირესი მნიშვნელობა;
თ) სიმეტრიის ღერძი, თუკი აქვს.
(0;0) წერტილს პარაბოლის წვერო ეწოდება.

მაგალითი

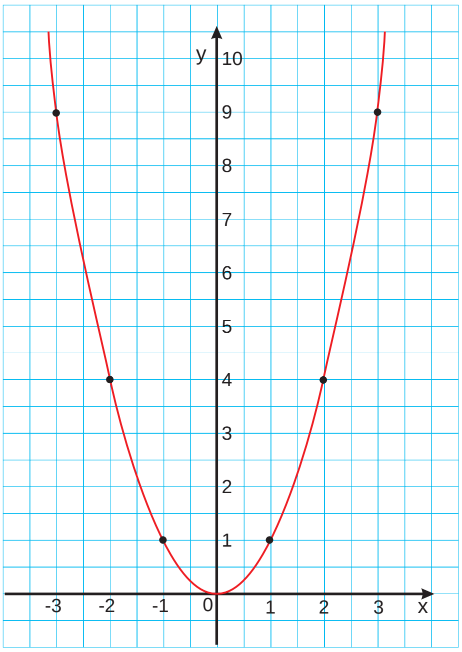
მდებარეობს თუ არა $y=x^2$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილი: ა) $M(-2\sqrt{3},12)$, ბ) $N(3,1;9,51)$.

ამოხსნა:

ა) $y=x^2$ განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ M წერტილის აბსცისა.
მივიღებთ $y=(-2\sqrt{3})^2=4\cdot3=12$.
ე.ი. $M(-2\sqrt{3},12)$ მდებარეობს $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე.
ბ) $y=(3,1)^2=(3+0,1)^2=9+2\cdot3\cdot0,1+0,01=9,61$.
ე.ი. $N(3,1;9,51)$ არ მდებარეობს $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე.

გადაიწერე და შეავსე:

1. $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი _?_.
2. $y=x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობები x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის _?_.
3. $y=x^2$ პარაბოლის წვეროა M (_?_; _?_).
4. $y=x^2$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა y=_?_.



ნახ. 1

5. თუ $0<x_1<x_2$, მაშინ y_1 _?_ y_2.
6. თუ $x_1<x_2<0$, მაშინ y_1 _?_ y_2.
7. თუ $M(a; a^2)$ წერტილი მდებარეობს $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ N(_?_; _?_) წერტილიც ამავე გრაფიკის წერტილია.

სავარჯიშოები

1. 1-ლ ნახაზზე გამოსახული $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით იპოვე:

ა) $f(1)$; $f(1,5)$; $f(-2,2)$; $f(2;5)$.

ბ) x-ის მნიშვნელობა, თუ $f(x)=$ 1; 5; 2; 7,5; 4.

გ)* x-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა $f(x)<4$; $f(x)>1$?

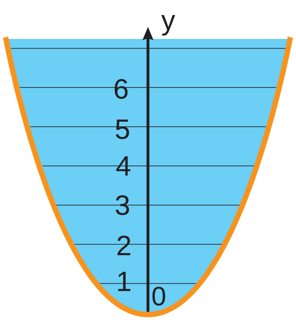
2. უჯრედებიანი რვეულის ფურცელზე შაბლონით ააგე $y=x^2$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვე:

ა) x-ის მნიშვნელობები, თუ $y(x)=9$; 3,2; 8; 5; 6,5.

ბ) $y(-3)$; $y(0)$; $y(2,7)$; $y(3)$; $y(-1,5)$.

გ) როგორი მნიშვნელობების მიღება შეუძლია x-ს – დაადგინე $y=x^2$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

დ) როგორ იცვლება ფუნქციის მნიშვნელობები, თუ x იზრდება:
1) $-\infty$-დან 0-მდე; 2) 0-დან $+\infty$-მდე?



პარაბოლის შაბლონი

3. $y=x^2$ ფორმულის მეშვეობით იპოვე:

ა) $y(0)$; $y(-0{,}5)$; $y(2{,}5)$; $y(-\sqrt{7})$;

ბ) x-ის მნიშვნელობა, თუ ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია: 4-ის; 6-ის; 2-ის.

4. აჩვენე, რომ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს წერტილები:

ა) A (–9; 81);

ბ) B (13 ; 169);

გ) C (2,5; 6,25);

დ) D (–1,4; 1,96).

5. მდებარეობს თუ არა $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილები:

$A(-1{,}5; 2{,}25)$; $B(2{,}3; 4{,}29)$; $C(1{,}3; 1{,}6)$; $D(-0{,}2; 0{,}04)$.

6. ააგე $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ x არის კვადრატის გვერდის სიგრძე (სანტიმეტრებში გამოსახული).

7. როგორ შეიცვლება კვადრატის ფართობი, თუ მისი გვერდი:

ა) გაიზრდება 2-ჯერ, 3-ჯერ, 5-ჯერ;

ბ) შემცირდება 2-ჯერ, 3-ჯერ, 4-ჯერ.

8. ააგე $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი და AB წრფე. გადაკვეთს თუ არა AB წრფე $y=x^2$ პარაბოლას, თუ:

ა) A(–1; –2); B(1; 5);

ბ) A(–2; –3); B(3; –1);

გ) A(–1, 5; 3); B(2; 1);

დ) A(2; –4); B(2; 3).

9. შეადარე ერთმანეთს $y=x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობები.

ა) f(1, 2) და f(3,5);

ბ) f(–3,1) და f(-2,5);

გ) f(–2) და f(1);

დ) f(4,2) და f(–5,1).

10. მოცემულია $f(x)=x^2$ ფუნქცია. რვეულში გაადაიხაზე და შეავსე ცხრილში ცარიელი უჯრები ისე, რომ პირველ სტრიქონში x–ის მნიშვნელობები დალაგებული იყოს:

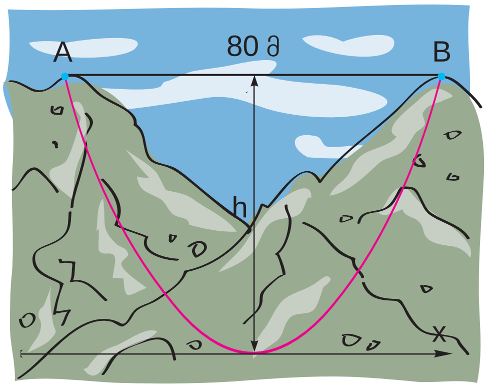
ა) ზრდის მიხედვით:

x	–4			0	1		3
f(x)		9	4			4	

ბ) კლების მიხედვით:

x		3,5		0			–4
f(x)	16		6,25		1	2,25	

11. მთამსვლელი A მწვერვალის დალაშქვრის შემდეგ გაემართა B მწვერვალის დასალაშქრად. წირი, რომელზეც უნდა იმოძრაოს მთამსვლელმა, პარაბოლაა. იპოვე ხეობის სიღრმე, თუ მწვერვალებს შორის მანძილი 80 მ-ია (მწვერვალების სიმაღლე ზღვის დონიდან ტოლია).



12. x სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის კუთხეებში ამოჭრეს 1 სმ სიგრძის გვერდის მქონე პატარა კვადრატები. დაწერე ფუნქცია, რომელიც თავდაპირველი კვადრატის გვერდის სიგრძეს უთანადებს მიღებული ფიგურის (ცისფერი) ფართობს.

გაიხსენე!

თუ წერტილი მდებარეობს გრაფიკზე, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს გრაფიკის შესაბამის განტოლებას.

13. F წერტილი მდებარეობს $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკზე. იპოვე c რიცხვი, თუ:

ა) F(0;2); ბ) F(11;0); გ) F(1;12); დ) F(4;28).

14*. ცნობილია, რომ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი $A(\sqrt{3m};27)$. მდებარეობს თუ არა იმავე გრაფიკზე:

ა) M(5; 8|m|+1) წერტილი?

ბ) $M(2m;\ m^2-1)$ წერტილი?

გამეორება

15. დაადგინე კანონზომიერება და დაწერე მიმდევრობის კიდევ სამი წევრი:

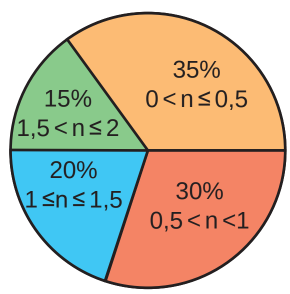
ა) $-\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ -4\sqrt{2};...$

გ) $2-\sqrt{3};\ 1;\ 2+\sqrt{3};\ ...$

ბ) 4; 12; 36; ...

დ) $1;\ 1+\sqrt{2};\ 1+2\sqrt{2};\ ...$

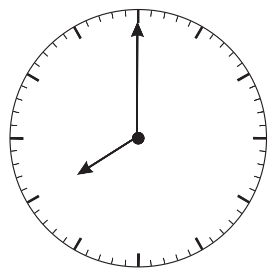
16. სკოლაში, რომელშიც 1200 მოსწავლე სწავლობს, ჩაატარეს გამოკითხვა – საშუალოდ რამდენ საათს (n) უთმობს მოსწავლე კომპიუტერულ თამაშებს. კითხვას არ უპასუხა 100-მა მოსწავლემ, დანარჩენ მოსწავლეთა პასუხები მოცემულია წრიულ დიაგრამაზე. გამოკითხულთაგან:



ა) რამდენი მოსწავლე უთმობს კომპიუტერულ თამაშებს 0,5 სთ-ზე მეტს?

ბ) რამდენი მოსწავლე უთმობს კომპიუტერულ თამაშებს 1 სთ-ზე ნაკლებს?

17. როგორც ვიცით, საათზე წუთების 60 დანაყოფია. დიდი ისარი 1 საათში გადის 60 დანაყოფს, პატარა კი – 5 დანაყოფს. ამასთან, დიდი ისარი ერთ საათში ასრულებს 360°-იან ბრუნს.



ა) გამოსახე დანაყოფებით: 1°, 30°, 45°, 90°, 180°;

ბ) გამოსახე გრადუსებით: 1; 5; 10; 30 დანაყოფი;

გ) გამოსახე დანაყოფ/საათებით (დან/სთ) საათის დიდი და პატარა ისრების სიჩქარეები;

დ) რამდენჯერ სწრაფად მოძრაობს დიდი ისარი, ვიდრე პატარა ისარი?

18. რამდენი გრადუსია ნახატზე გამოსახულ საათის ისრებს შორის?

19*. შვიდის 10 წუთზე რამდენი გრადუსია საათის ისრებს შორის?

20*. თუ ახლა 2 საათია, რამდენი წუთის შემდეგ იქნება პირველად საათის ისრებს შორის კუთხე 90 გრადუსი?

21. დაწერე იმ წრფის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=2x-3$ ფუნქციის გრაფიკის:

ა) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y+2 \end{cases}$ პარალელური გადატანით;

ბ) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y-1 \end{cases}$ პარალელური გადატანით.

22. მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში ააგე $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. დახაზე წირი, რომელიც მიიღება $y=x^2$ პარაბოლის

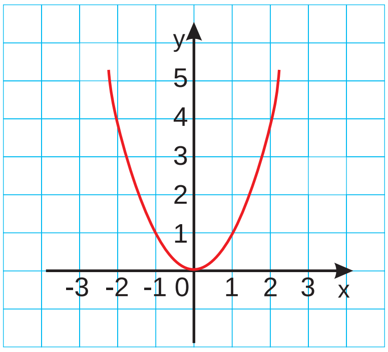
ა) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y+1 \end{cases}$ პარალელური გადატანით;

ბ) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y-3 \end{cases}$ პარალელური გადატანით.

$f(x)=x^2+c$ ფუნქცია

თქვენ გაეცანით $y=x^2$ ფუნქციას, მის თვისებებს.

შეგახსენებთ: $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი არის პარაბოლა (ნახ.1).



ნახ.1

1. პარაბოლა მოთავსებულია x ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში. ე.ი. $\forall x \in R$-თვის $f(x) \geq 0$.

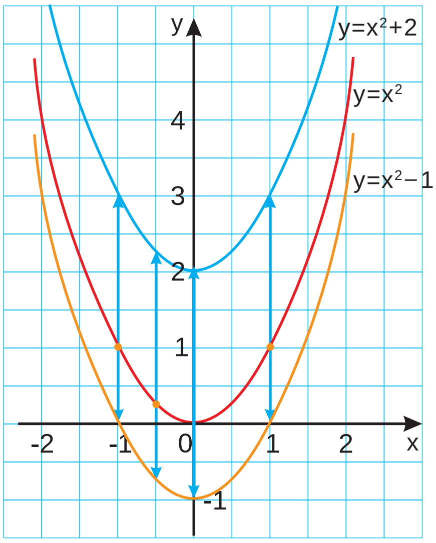
2. პარაბოლა სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

$$f(x)=f(-x)=x^2.$$

3. პარაბოლის წვეროა O(0;0) – პარაბოლის „უღრმესი“ წერტილი. ე.ი. $f(x)=x^2$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0.

ვნახოთ, როგორ აიგება $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა მოცემულია $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

განვიხილოთ $f(x)=x^2+2$ და $f(x)=x^2-1$ ფუნქციები.



შევადგინოთ შესაბამისი ცხრილი:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^2	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4
x^2+2	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6
x^2-1	3	1,25	0	−0,75	−1	−0,75	0	1,25	3

ცხრილიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $y=x^2+2$ ფუნქციის მნიშვნელობები 2 ერთეულით მეტია, ხოლო $y=x^2-1$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები 1 ერთეულით ნაკლებია $y=x^2$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებზე. ე.ი. თუ $y=x^2$ პარაბოლას გადავიტანთ y ღერძის პარალელურად 2 ერთეულით ზევით, მივიღებთ $y=x^2+2$ ფუნქციის გრაფიკს, ხოლო $y=x^2$ პარაბოლის y ღერძის პარალელურად −1 ერთეულით (ქვევით) გადატანით მივიღებთ $y=x^2-1$ ფუნქციის გრაფიკს.

? დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=x^2$ პარაბოლის y ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით:

ა) 1,5 ერთეულით ზევით;

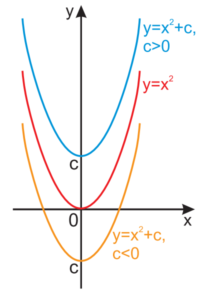
ბ) 2,3 ერთეულით ქვევით;

გ) 5 ერთეულით ზევით.

მაშასადამე:

> $f(x)=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ორდინატთა ღერძის გასწვრივ c ერთეულით (ზევით, თუ $c>0$ და ქვევით, თუ $c<0$).

> $y=x^2+c$ პარაბოლის წვეროა $M(0;c)$, ხოლო სიმეტრიის ღერძის განტოლებაა $x=0$.



ნახაზზე მოცემული პარალელური გადატანა მოცემულია ფორმულებით:

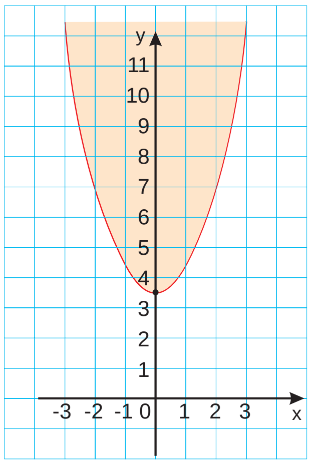
$$\begin{cases} x \to x \\ y \to y+c \end{cases}$$

მაგალითი 1

პარაბოლის შაბლონის საშუალებით დახაზეთ $y=x^2+3{,}5$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

პარაბოლის წვერო მოვათავსოთ $(0;3{,}5)$ წერტილში. შაბლონის სიმეტრიის ღერძი კი დავამთხვიოთ y ღერძს (ნახ.1).



ნახ.1

მაგალითი 2

მდებარეობს თუ არა $f(x)=x^2-2$ ფუნქციის გრაფიკზე:
$A(0;-2)$; $B(2;1)$; $C(-1;-1)$ წერტილები.

ამოხსნა:

$f(0)=0^2-2=-2$	$A(0;-2)$ მდებარეობს $f(x)=x^2-2$ ფუნქციის გრაფიკზე;
$f(2)=2^2-2=2$	$B(2;1)$ არ მდებარეობს $f(x)=x^2-2$ ფუნქციის გრაფიკზე;
$f(-1)=(-1)^2-2=-1$	$C(-1;-1)$ მდებარეობს $f(x)=x^2-2$ ფუნქციის გრაფიკზე.

გადაიწერე და შეავსე:

1. $y=x^2+c$ პარაბოლა სიმეტრიულია __?__ ღერძის მიმართ.
2. $y=x^2-3$ პარაბოლის წვეროა A (_?_; _?_) წერტილი.
3. $y=x^2+2$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა __?__.
4. $y=x^2+c$ ფუნქცია (__?__) შუალედში ზრდადია, ხოლო (__?__) შუალედში კი – კლებადი.
5. თუ $y=x^2-1$ პარაბოლას გავაცურებთ __?__ ერთეულით, __?__ ღერძის გასწვრივ, მივიღებთ $y=x^2+3$ პარაბოლას.

სავარჯიშოები

1. ახსენი, როგორ მიიღება $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკისგან შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=x^2-7$; ბ) $y=x^2+5{,}1$; გ) $y=-2\frac{1}{3}+x^2$; დ) $y=-a+x^2$.

2. პარაბოლის შაბლონის საშუალებით ააგე ფუნქციის გრაფიკი. იპოვე მიღებული პარაბოლის წვეროს კოორდინატები:

ა) $y=x^2-3{,}5$; ბ) $y=x^2+1{,}2$; გ) $y=x^2+4{,}3$; დ) $y=x^2-4$.

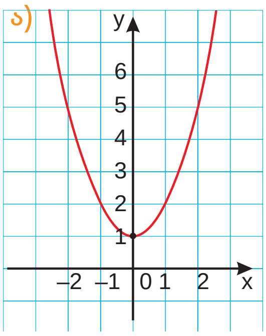
3. დაწერე $y=x^2+c$ ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ პარაბოლის წვეროა S წერტილი:

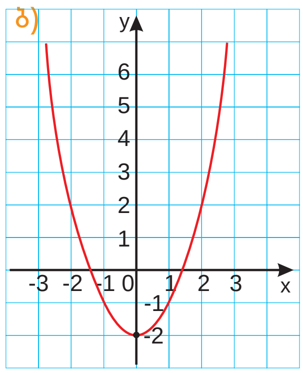
ა) $S\left(0;\frac{1}{4}\right)$; ბ) $S(0;-0{,}45)$; გ) $S\left(0;2\frac{3}{7}\right)$; დ) $S\left(0;-8\frac{2}{5}\right)$.

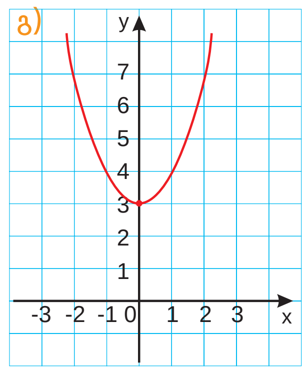
4. c-ს რა მნიშვნელობისათვის მდებარეობს M წერტილი $y=x^2+c$ პარაბოლაზე?

ა) $M(0;5)$; ბ) $M(1;5)$; გ) $M(-2;9)$; დ) $M(-1{,}5;1)$.

5. ნახაზზე მოცემულია $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი. დაწერე შესაბამისი განტოლება და ჩამოწერე მისი თვისებები:



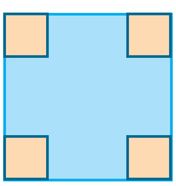




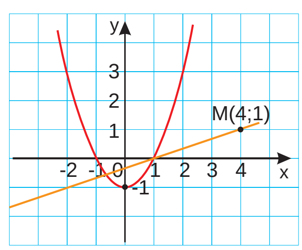
6. $M(-2;-1)$ წერტილი მდებარეობს $y=x^2+c$ პარაბოლაზე. მდებარეობს თუ არა იმავე პარაბოლაზე K წერტილი?

ა) $K(3;4)$; ბ) $K(-3;2)$; გ) $K(1{,}5;-2{,}25)$; დ) $K(-2{,}5;1)$.

7. ააგე სქემატურად $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერე მისი თვისებები, როცა: ა) $c>0$; ბ) $c<0$.



8. x სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის კუთხეებში ამოჭრეს 1 სმ სიგრძის გვერდის მქონე პატარა კვადრატები, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. დაწერე ფუნქცია, რომელიც თავდაპირველი კვადრატის გვერდის სიგრძეს შეუსაბამებს მიღებული ფიგურის (ცისფერი) ფართობს.

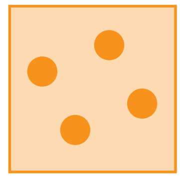


9. ნახაზზე მოცემულია $y=x^2+c$ პარაბოლა და $y=kx+b$ წრფე. იპოვე k, b და c კოეფიციენტები.

10. კვადრატის გვერდის სიგრძე x სმ-ია. მისი ერთი გვერდი 3 სმ-ით შეამცირეს, ხოლო მეორე 3 სმ-ით გაადიდეს. დაწერე f ფუნქცია, რომელიც გვიჩვენებს მიღებული მართკუთხედის ფართობის კვადრატის გვერდის სიგრძეზე დამოკიდებულებას.

ა) იპოვე f(10), f(12), f(20); ბ) იპოვე მიღებული ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე; გ) დახაზე f ფუნქციის გრაფიკი, ჩამოწერე მისი თვისებები (ფუნქციის განსაზღვრის არედ ჩათვალე R).

11. x სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატული ფორმის თუნუქის ფურცელზე ამოჭრილია R=5 მმ რადიუსიანი 4 წრიული ხვრელი.

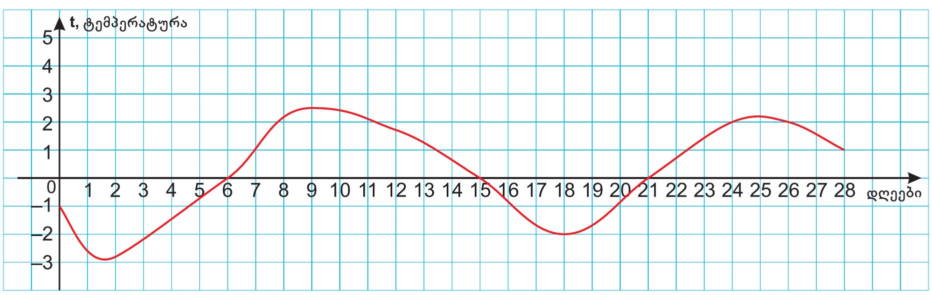


ა) დაწერე ფუნქცია f კვადრატის გვერდი → თუნუქის დარჩენილი ნაწილის ფართობი;
ბ) იპოვე ფუნქციის მნიშვნელობა, თუ x=4 სმ, 7 სმ, 1 მ.

გამოყენება

12. ნახაზზე მოცემული წირი გვიჩვენებს თებერვლის ყოველდღიურ საშუალო ტემპერატურას. დაადგინე, დროის რა პერიოდში იყო ტემპერატურა:

ა) უარყოფითი;
ბ) დადებითი;
გ) ნულის ტოლი;
დ) ყველაზე მაღალი;
ე) ყველაზე დაბალი;
ვ) იზრდებოდა.



პროექტი დამოუკიდებელი კვლევისთვის

13. პროგრამაში GeoGebra 5 ააგე $y=x^2+a$ $a\in[-5;5]$, ბიჯით 1, ფუნქციის გრაფიკი:

ა) ფუნქციის რომელი გარდაქმნის დემონსტრირება მოხდა?

ბ) ამობეჭდე, წარმოადგინე გაკვეთილზე.

14. მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში დახაზე წირი, რომელიც მიიღება $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის

ა) $x \to x-2$, $y \to y$ ბ) $x \to x+3$, $y \to y$ პარალელური გადატანით.

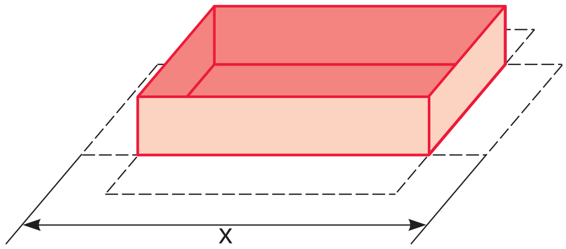
გასახსენებლად!

მარჯვენა ღილაკზე დააწკაპე ალგებრის ფანჯარაში ფუნქციის განტოლებასთან, შემდეგ „თვისებები“, „ძირითადი“, „აჩვენეთ კვალი“, „ფერი“. ცვალე კურსორით a-ს მნიშვნელობები.

არ დაგავიწყდეს: გრაფიკის აგებამდე მოაწესრიგე სახატავი არე (ფერები), დააწკაპე სრიალაზე და მიანიჭე a-ს მნიშვნელობები.

$f(x)=(x-d)^2+m$ ფუნქცია

ფირმა კვადრატული ფორმის მუყაოს ფურცლებისაგან ღია ყუთებს ამზადებს.

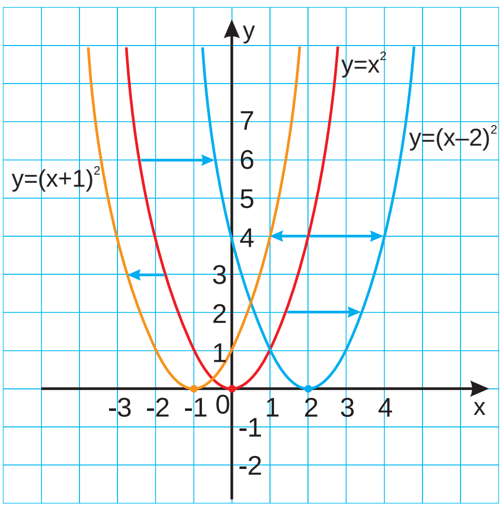


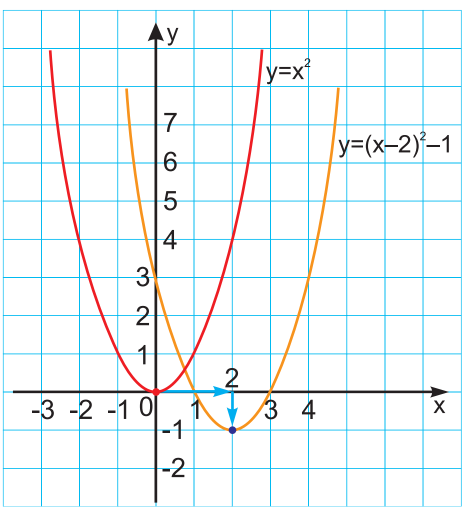
ა) იპოვეთ ყუთის ფუძის ფართობი, თუ ყუთის სიმაღლე 20 სმ-ია.

ბ) დაწერეთ ფუნქცია f: ფურცლის სიგანე → ყუთის ფუძის ფართობი.

გ) იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა x=10 დმ; 8 დმ; 5 დმ; 4,5 დმ; 4,1 დმ.

დ) ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.





ავაგოთ $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ ფუნქციათა გრაფიკები. შევადგინოთ შესაბამისი ცხრილები.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-2)^2$	25	16	9	4	1	0	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x+1)^2$	4	1	0	1	4	9	16

თუ ცხრილს დავაკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ $y=(x-2)^2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=x^2$ პარაბოლის 2 ერთეულით გადატანით (მარჯვნივ) x ღერძის პარალელურად, ხოლო $y=x^2$ პარაბოლის x ღერძის პარალელურად (-1) ერთეულით (მარცხნივ 1 ერთეულით) გადატანით კი მიიღება $y=(x+1)^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

განვიხილოთ $y=(x-2)^2-1$ ფუნქცია. შევადგინოთ ცხრილი.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-2)^2$	25	16	9	4	1	0	1
$(x-2)^2-1$	24	15	8	3	0	-1	0